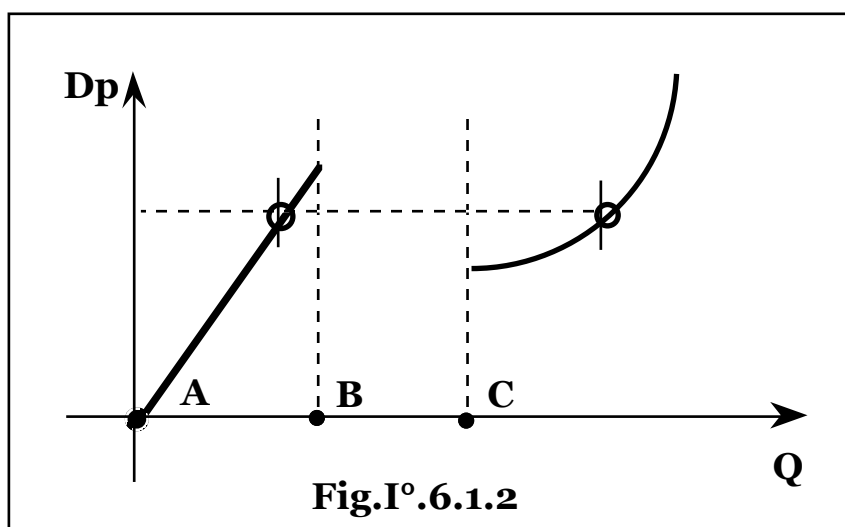
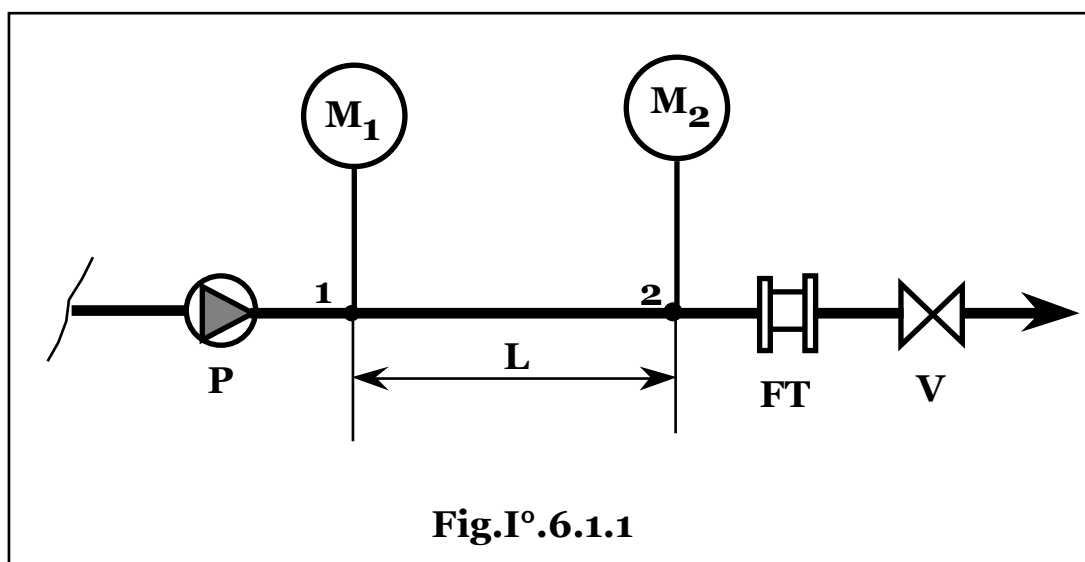


## CAP.I°.6 – IL CIRCUITO TERMOFLUIDODINAMICO.

### § I°.6.1 – DIMENSIONAMENTO FLUIDODINAMICO DELLE CONDOTTE.

In una linea fluidodinamica, (**Fig.I°.6.1.1**), nella quale tramite azione su un organo di intercettazione **V**, è possibile modulare la portata **Q**, (in volume), o **G = d<sub>s</sub>Q**, (in massa), generata da una macchina operatrice **P**, misurando, (con dispositivi a flangia tarata, **FT**), la portata e, (con un insieme di manometri **M<sub>1</sub>**, **M<sub>2</sub>**), la diminuzione di pressione **Dp** lungo un tratto di condotta di lunghezza **L**, è possibile ottenere sperimentalmente, (**Fig.I°.6.1.2**), l'andamento della funzione: **Dp = Dp(Q)**, o **Dp = Dp(G)**.



In caso di tratto di tubazione orizzontale e a diametro costante, non si hanno variazioni di energia potenziale di quota e, supposte le cadute di pressione sufficientemente contenute da trascurare la conseguente variazione di densità, cinetica, per cui la funzione rappresenta la variazione di carico totale, ovvero la dissipazione di energia specifica del fluido lungo il tratto.

La regione **A** corrisponde alle condizioni di moto laminare, la regione **C** a quelle di moto turbolento, mentre la regione **B**, corrisponde alla zona di transizione in cui non sono definibili quantitativamente valori sperimentali.

### Analisi dimensionale.

Supposta monomia l'espressione analitica di una grandezza, (**X**), in funzione di altre grandezze, (**A, B, C, ...**), ovvero:  $\mathbf{X} = \mathbf{kA^aB^bC^c} \dots$ , con **k** costante di proporzionalità, può essere definita tramite analisi dimensionale, procedendo per via sperimentale, con, successivamente, tutte le grandezze costanti tranne una, da cui i coefficienti **a, b, c, ...**, che fissano l'intensità con cui la grandezza dipende dalle altre, (positivi per dipendenza diretta, negativi per dipendenza inversa, unitari per dipendenza lineare, nulli per assenza di dipendenza, ecc.).

L'analisi dimensionale della perdita di carico per unità di lunghezza di condotta, ( $\mathbf{R} = - \mathbf{dp/dL}$ ), mostra che la dipendenza funzionale può

essere descritta analiticamente con la relazione:  $\mathbf{R} = - \frac{\mathbf{dp}}{\mathbf{dL}} = \mathbf{k_a} \frac{\mathbf{d_s}}{\mathbf{D}} \frac{\mathbf{c^2}}{\mathbf{2}}$ ,

con: **D** diametro idraulico della condotta, (quattro volte la sezione diviso il perimetro);

**k<sub>a</sub>** coefficiente di attrito.

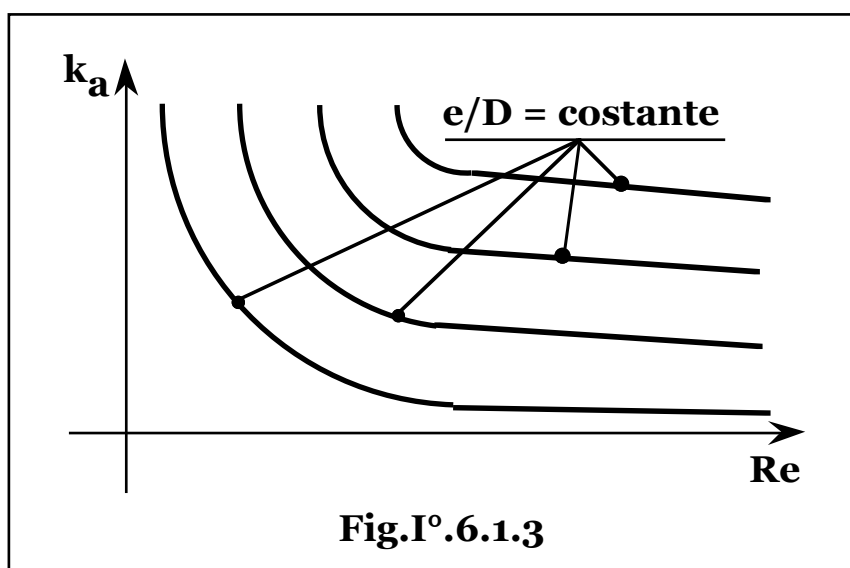
Il numero, (adimensionale), di Reynolds, (**Re**):  $\mathbf{Re} = \mathbf{cD/v_c} = \mathbf{d_s cD/v_d}$ , (**v<sub>c</sub>, v<sub>d</sub>**, viscosità cinematica e dinamica del fluido), risulta il parametro di similitudine fluidodinamica per il moto dei fluidi.

Ai bassi valori, (**Re < 2.300**), il moto risulta laminare, mentre per valori superiori, (**Re > 10<sup>5</sup>**), turbolento.

Il coefficiente di attrito risulta una funzione di **Re** e della rugosità o scabrezza relativa della condotta: **e/D**, (**e** misura della rugosità o scabrezza delle pareti interne), secondo grafici sperimentali, (**Fig.I°.6.1.3**).

Per la distinzione in intervalli di applicazione con formule empiriche, si definiscono lisce le tubazioni con:  $e/D < 30/Re^{7/8}$ , nel cui campo si ha:

Numero di Re	Tipo di moto	Coefficiente di attrito $k_a$
$Re < 2.300$	laminare	$K_a = 64/Re = 64v_c/(cD) = 64v_d/(d_scD)$
$2.300 < Re < 10^5$	turbolento	$k_a = 0,316 Re^{-0,25}$
$10^5 < Re < 10^8$	turbolento	$k_a = (3,2 + 221 Re^{-0,237})10^{-3}$



Per:  $e/D > 30/Re^{7/8}$ , l'influenza della scabrezza diviene preponderante rispetto alla viscosità e il coefficiente di attrito risulta indipendente dal numero di Reynolds,  $Re$  e vale:  $k_a = \frac{1}{\left(1,14 - 0,87 \ln \frac{e}{D}\right)^2}$ .

Per:  $e/D \sim 30/Re^{7/8}$ , vale la correlazione:

$$\frac{1}{\sqrt{k_a}} = -0,87 \ln \left( 0,27 \frac{e}{D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{k_a}} \right),$$

mentre per moto turbolento completamente sviluppato, il coefficiente di attrito può comunque essere considerato sufficientemente costante.

La diversificazione della legge generale, richiesta dalla differente fenomenologia dei due campi di moto, viene inserita con una diversa dipendenza funzionale della grandezza  $k_a$ , la cui espressione analitica

in forma di coefficiente di proporzionalità appare giustificata dalla pratica preponderanza del moto di tipo turbolento completamente sviluppato, in cui il coefficiente di attrito può comunque essere considerato sufficientemente costante.

## § I°.6.2 – FLUIDI INCOMPRESSIBILI.

### Moto turbolento.

In caso di fluidi incompressibili in moto turbolento, per l'integrazione

dell'equazione generale:  $-dp = k_a \frac{d_s}{D} \frac{c^2}{2} dL$ , si ha:

$$d_s = \text{costante}; k_a = \text{costante},$$

da cui:  $Dp = k_a \frac{d_s}{D} \frac{c^2}{2} L$  e in caso di tubazioni circolari:

$$Dp = k_a \frac{d_s}{D} \frac{c^2}{2} L = \frac{8k_a d_s Q^2}{\pi^2 D^5} L = \frac{8k_a G^2}{\pi^2 D^5 d_s} L,$$

$$\text{essendo: } c = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4G}{\pi D^2 d_s}.$$

Per la funzione:  $p = p(L)$ , essendo:  $Dp(L) = p_1 - p(L)$ , si ottiene, quindi:

$$p(L) = p_1 \left( 1 - \frac{8k_a G^2 L}{\pi^2 D^5 p_1 d_s} \right); \quad -\frac{dp}{dL} = \frac{8k_a d_s Q^2}{\pi^2 D^5} = \frac{8k_a G^2}{\pi^2 D^5 d_s}.$$

Essendo il massimo salto di pressione dissipabile pari alla pressione stessa  $p_1$ , la massima distanza superabile dalla portata  $G$  di un fluido incompressibile, ( $L_{oi}$ ), in moto turbolento, si ottiene ponendo:  $Dp = p_1$ , ovvero:  $p(L) = 0$ , (pari alla pressione ambiente se si considerano pressioni relative, o a zero, con raggiungimento del vuoto, in caso di

$$\text{pressioni assolute), e risulta: } L_{oi} = \frac{\pi^2 D^5 p_1 d_s}{8k_a G^2}.$$

$$\text{La relazione: } R = -\frac{dp}{dL} = k_a \frac{d_s}{D} \frac{c^2}{2} = \frac{8k_a d_s Q^2}{\pi^2 D^5} = \frac{8k_a G^2}{\pi^2 D^5 d_s}, \quad \text{viene}$$

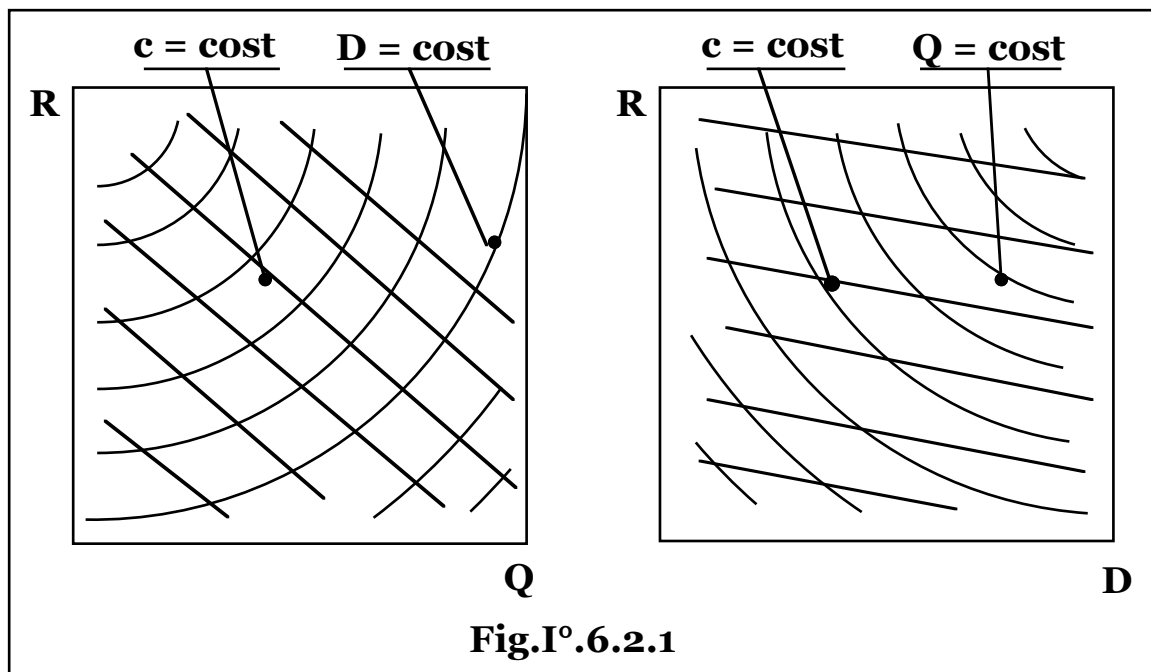
comunemente riportata in grafico in funzione della portata in famiglie di curve per diversi valori della velocità del fluido e del diametro della condotta, ovvero in funzione del diametro della condotta per diversi valori della velocità o della portata del fluido, (**Fig.I°.6.2.1**).

Il sistema risulta, cioè, definito da quattro variabili, (**R**, **Q**, **c**, **D**), legate da due relazioni: **R** = **k<sub>a</sub> 8d<sub>s</sub>Q<sup>2</sup>/(π<sup>2</sup>D<sup>5</sup>)**; **c** = **4Q/(πD<sup>2</sup>)**, e ammette quindi, due gradi di libertà, ovvero fissate due di esse è possibile risalire alle due rimanenti.

La potenza di circolazione richiesta da una portata in massa di fluido, (**G**), per superare una caduta di pressione, (**Dp**), risulta pari all'energia richiesta dall'unità di massa di fluido, (**Dp/d<sub>s</sub>**), per la portata, ovvero:

**P** = **GDp/d<sub>s</sub>** = **QDp**, e pertanto la potenza dissipata per unità di lunghezza, (**DP**), a causa delle perdite di carico, vale:

$$\frac{dP}{dL} = \left( - \frac{dp}{dL} \right) Q = QR = \frac{8k_a d_s Q^3}{\pi^2 D^5} = \frac{8k_a G^3}{d_s^2 \pi^2 D^5}.$$



Tenendo conto anche della variazione del coefficiente di attrito con la scabrezza relativa della tubazione, la dipendenza delle perdite di carico in funzione del diametro della condotta, è secondo **D<sup>-5,33</sup>**.

In genere, tuttavia, per semplicità e anche tenuto conto dell'incertezza circa la costante di proporzionalità, si trascura l'influenza della scabrezza relativa, (variabile, inoltre, nel tempo con l'usura della tubazione), sul coefficiente di attrito mantenendo una dipendenza secondo **D<sup>-5</sup>**.

## Moto laminare.

In caso di moto laminare, per l'integrazione dell'equazione generale:

$$-dp = k_a \frac{d_s}{D} \frac{c^2}{2} dL,$$

si ha:  $d_s = \text{costante}$ ,  $k_a = 64/Re = 64 v_c/(cD)$ , da cui:

$$Dp = \frac{32v_c d_s c}{D^2} L = \frac{128v_c d_s Q}{\pi D^4} L = \frac{128v_c G}{\pi D^4} L.$$

Per la funzione:  $p = p(L)$ , essendo:  $Dp(L) = p_1 - p(L)$ , si ottiene, quindi:

$$p(L) = p_1 - Dp(L) =$$

$$= p_1 \left( 1 - \frac{32v_c d_s c}{D^2 p_1} L \right) = p_1 \left( 1 - \frac{128v_c d_s Q}{\pi D^4 p_1} L \right) = p_1 \left( 1 - \frac{128v_c G}{\pi D^4 p_1} L \right);$$

$$R = -\frac{dp}{dL} = \frac{32v_c d_s c}{D^2} = \frac{128v_c d_s Q}{\pi D^4} = \frac{128v_c G}{\pi D^4}.$$

La massima distanza superabile dalla portata  $G$  di un fluido

incomprimibile, ( $L_{oi}$ ), in moto laminare, risulta:  $L_{oi} = \frac{\pi D^4 p_1}{128v_c G}$ .

La potenza di circolazione, ( $DP$ ), dissipata per unità di lunghezza, vale:

$$\frac{dP}{dL} = \left( -\frac{dp}{dL} \right) Q = QR = \frac{128v_c d_s Q^2}{\pi D^4} = \frac{128v_c G^2}{\pi D^4 d_s}.$$

Il moto laminare appare svantaggiato dal punto di vista energetico.

A parità di perdite di carico e di condizioni geometriche, infatti, la portata risulta notevolmente ridotta rispetto al moto turbolento, per cui in pratica, per condotte correttamente dimensionate, il moto laminare si presenta solo con fluidi a elevata viscosità, (oli).

Nel dimensionamento delle pompe di circolazione, anche per moti di regime di tipo turbolento, occorre prevedere la potenza di spunto necessaria all'avvio per il superamento delle perdite di carico ai bassi valori della portata nella regione di moto laminare.

## § I°.6.3 – FLUIDI COMPRIMIBILI.

In caso di fluidi comprimibili si ha:  $d_s = d_s(p, T)$ , mentre i valori di viscosità relativi ai fluidi di comune impiego, portano a regimi di moto turbolento in tutte le applicazioni pratiche, ( $k_a = \text{costante}$ ).

Supposta la trasformazione isoterma, risulta:  $p/d_s = p_1/d_{s1}$ , da cui:

$$R = -\frac{dp}{dL} = k_a \frac{d_s}{D} \frac{c^2}{2} = \frac{8k_a G^2}{\pi^2 D^5 d_s} = \frac{8k_a p_1 G^2}{\pi^2 D^5 d_{s1}} \frac{1}{p(L)},$$

e integrando:  $\frac{1}{2} \left[ p_1^2 - p^2(L) \right] = \frac{8k_a p_1 G^2 L}{\pi^2 D^5 d_{s1}},$

da cui:  $p(L) = p_1 \sqrt{1 - \frac{16k_a G^2 L}{\pi^2 D^5 d_{s1} p_1}};$

$$Dp(L) = p_1 - p(L) = p_1 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{16k_a G^2 L}{\pi^2 D^5 d_{s1} p_1}} \right);$$

$$R = -\frac{dp}{dL} = \frac{\frac{8k_a G^2}{\pi^2 D^5 d_{s1}}}{\sqrt{1 - \frac{16k_a G^2 L}{\pi^2 D^5 p_1 d_{s1}}}}.$$

Per perdite contenute, per le quali potendosi ritenere:

$$\frac{16k_a G^2 L}{\pi^2 D^5 d_{s1} p_1} \ll 1,$$

è possibile troncare ai primi termini lo sviluppo in serie del radicale, si

ottiene:  $Dp \approx p_1 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{16k_a G^2 L}{\pi^2 D^5 p_1 d_{s1}} \right) \right] = \frac{8k_a G^2 L}{\pi^2 D^5 d_{s1}},$

ovvero il modello relativo ai fluidi incomprimibili.

La massima distanza superabile dalla portata  $G$  di un fluido

comprimibile, ( $L_{oc}$ ), risulta:  $L_{oc} = \frac{\pi^2 D^5 p_1 d_{s1}}{16k_a G^2}.$

La potenza di circolazione, ( $DP$ ), dissipata per unità di lunghezza, vale:

$$\frac{dP}{dL} = \left( -\frac{dp}{dL} \right) \frac{G}{d_s} = \left( -\frac{dp}{dL} \right) G \frac{p_1}{d_{s1}} \frac{1}{p(L)} = \frac{\frac{8k_a G^3}{\pi^2 D^5 d_{s1}^2}}{1 - \frac{16k_a G^2 L}{\pi^2 D^5 p_1 d_{s1}}}.$$

Per perdite di carico fino al vuoto, [ $\mathbf{p(L) = 0}$ ], in caso di trasformazione isoterma la potenza di circolazione tende all'infinito, essendo:

$$\frac{dP}{dL} = \left( -\frac{dp}{dL} \right) \frac{G}{d_s} = \left( -\frac{dp}{dL} \right) G \frac{p_1}{d_{s1}} \frac{1}{p(L)} = G \frac{p_1}{2d_{s1}} \frac{\frac{16k_a G^2}{\pi^2 D^5 d_{s1} p_1}}{1 - \frac{16k_a G^2}{\pi^2 D^5 d_{s1} p_1} L},$$

$$P(L) = \frac{G p_1}{2d_{s1}} \int_0^L \frac{\frac{16k_a G^2}{\pi^2 D^5 d_{s1} p_1}}{1 - \frac{16k_a G^2}{\pi^2 D^5 d_{s1} p_1} L} dL = \frac{G p_1}{2d_{s1}} \ln \left[ 1 - \frac{16k_a G^2}{\pi^2 D^5 d_{s1} p_1} L \right]_L^0 =$$

$$= \frac{G p_1}{2d_{s1}} \ln \frac{1}{1 - \frac{16k_a G^2}{\pi^2 D^5 d_{s1} p_1} L},$$

che per:  $L = \frac{\pi^2 D^5 p_1 d_{s1}}{16k_a G^2} = L_{oc}$ , ovvero:  $\mathbf{p(L) = 0}$ , tende a infinito.

Fisicamente per un fluido comprimibile, per trasformazione isoterma, (e per ogni trasformazione politropica con:  $\mathbf{n \leq 1}$ ), al diminuire della pressione diminuisce la densità e quindi, a parità di portata in massa, aumenta la portata in volume e quindi la velocità di efflusso e conseguentemente le perdite di carico per unità di lunghezza, (ovvero la pendenza della curva di pressione in funzione della distanza percorsa).

Dalla condizione di minimo per i massimi valori di densità, per:  $\mathbf{L = 0}$ , ( $\mathbf{Dp = 0}$ ,  $\mathbf{p = p_1}$ ,  $\mathbf{d_s = d_{s1}}$ ), le perdite aumentano fino a valori illimitati per:  $\mathbf{L = L_{oc}}$ , ove tendendo a zero la pressione e quindi la densità, la velocità e quindi le cadute di pressione, tendono a valori infiniti, (o alternativamente il lavoro necessario a compensarle, tendendo all'infinito il volume specifico tende a valori illimitati).

Risulta, quindi, (**Fig.I°.6.3.1**):  $(-dp/dL) = \text{costante}$ , per fluidi incomprimibili, mentre per fluidi comprimibili:

$$\frac{8k_a G^2}{\pi^2 D^5 d_{s1}} \leq -\frac{dp}{dL} \leq \infty, \text{ per: } \mathbf{0 \leq L \leq L_{oc}}.$$

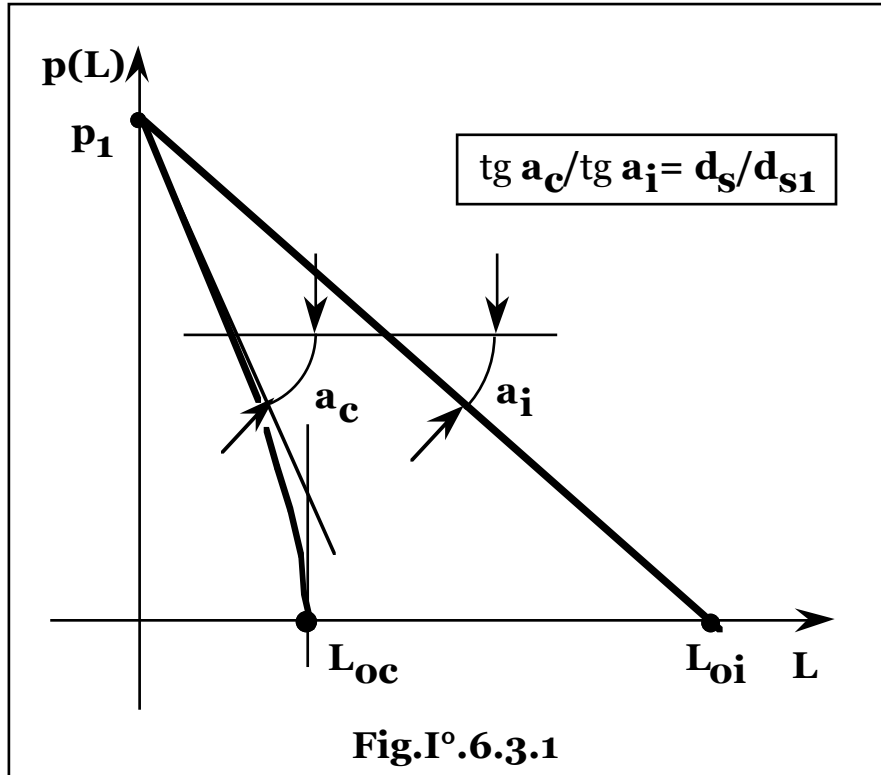
Pertanto, a parità di geometria e portata in massa, il rapporto di perdite di carico per unità di lunghezza, vale:



$$\frac{d_s}{d_{s1}} \leq \frac{\left(-\frac{dp}{dL}\right)_c}{\left(-\frac{dp}{dL}\right)_i} \leq \infty, \text{ per } 0 \leq L \leq L_{oc}.$$

Il rapporto fra le distanze massime superabili con:  $Dp = p_1$ , vale:

$$L_{oi}/L_{oc} = 2d_s/d_{s1}.$$



A parità di portata in massa, il rapporto dei diametri di tubazione che realizzano la medesima perdita di carico in caso di fluidi comprimibili e incomprimibili, rispettivamente,  $(D_c/D_i)$ , vale:

$$\left(\frac{d_s}{d_{s1}}\right)^{\frac{1}{5}} \leq \frac{D_c}{D_i} \leq \infty, \text{ per: } 0 \leq L \leq L_{oc}.$$

Qualora la trasformazione sia descritta con la funzione politropica, si

ottiene:  $\frac{1}{d_s} = \frac{p_1^{1/n}}{d_{s1}} \frac{1}{p(L)^{1/n}}$ , da cui:  $-\frac{dp(L)}{dL} = \frac{8k_a G^2 p_1^{1/n}}{\pi^2 D^5 d_{s1}} p(L)^{-1/n}$ ,

e quindi: 
$$p(L) = p_1 \left\{ 1 - \frac{n+1}{n} \frac{8k_a G^2}{\pi^2 D^5 p_1 d_{s1}} L \right\}^{\frac{n}{n+1}};$$

$$\begin{aligned} \frac{dP(L)}{dL} &= \left( - \frac{dp(L)}{dL} \right) \frac{G}{d_s} = \left( \frac{8k_a G^3 p_1^{2/n}}{\pi^2 D^5 d_{s1}^2} \frac{1}{p(L)^{2/n}} \right) = \\ &= \frac{\frac{8k_a G^3}{\pi^2 D^5 d_{s1}^2}}{\left\{ 1 - \frac{n+1}{n} \frac{8k_a G^2}{\pi^2 D^5 p_1 d_{s1}} L \right\}^{\frac{2}{n+1}}}. \end{aligned}$$

Integrando, con condizione al contorno:  $P(0) = 0$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} P(L) &= G \frac{p_1}{d_{s1}} \frac{n}{n-1} \left\{ 1 - \left[ 1 - \frac{n+1}{n} \frac{8k_a G^2}{\pi^2 D^5 p_1 d_{s1}} L \right]^{\frac{n-1}{n+1}} \right\} = \\ &= G \frac{p_1}{d_{s1}} \frac{n}{n-1} \left\{ 1 - \left[ \left( 1 - \frac{n+1}{n} \frac{8k_a G^2}{\pi^2 D^5 p_1 d_{s1}} L \right)^{\frac{n}{n+1}} \right]^{\frac{n-1}{n}} \right\} = \\ &= G \frac{p_1}{d_{s1}} \frac{n}{n-1} \left\{ 1 - \left[ \frac{p(L)}{p_1} \right]^{\frac{n-1}{n}} \right\} = G \frac{p_1}{d_{s1}} \frac{n}{n-1} \left\{ 1 - \left[ \frac{p_1 - Dp(L)}{p_1} \right]^{\frac{n-1}{n}} \right\}, \end{aligned}$$

corrispondente al lavoro di espansione ottenibile dall'espansione dissipativa dalla pressione  $p_1$  al valore finale:  $p_1 - Dp(L)$ :

$$P(L)/G = \int_{p_1 - Dp}^{p_1} v dp = p_1 v_1 \frac{n}{n-1} \left\{ 1 - \left[ \frac{p_1 - Dp(L)}{p_1} \right]^{\frac{n-1}{n}} \right\}.$$

Per:  $L = L_{oc} = \frac{\pi^2 D^5 p_1 d_{s1}}{16 k_a G^2}$ , le perdite di carico eguagliano la pressione

iniziale:  $Dp = p_1$ , giungendo fino al vuoto,  $[p(L) = 0]$ , e quindi:

$P(L) = G \frac{p_1}{d_{s1}} \frac{n}{n-1} = G p_1 v_1 \frac{n}{n-1}$ , che per trasformazione isoentropica fornisce il risultato valido per espansioni fino al vuoto:

$$P(L) = G \frac{k}{k-1} p_1 v_1 = G \frac{k}{k-1} R_a T_1 = G c_p T_1.$$

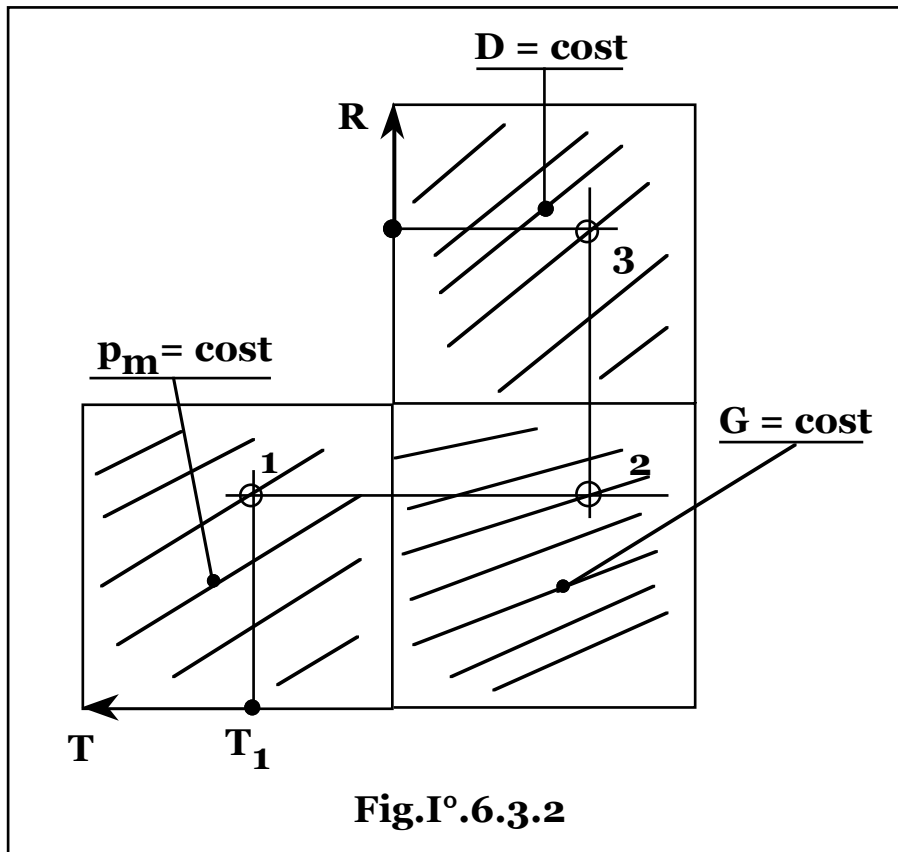
Infatti per ogni trasformazione politropica con esponente  $n > 1$ , al tendere a zero della pressione, parimenti tende a zero la temperatura e il volume specifico assume forma indeterminata potendo mantenere un valore finito, (o alternativamente la densità e quindi la velocità di efflusso, può mantenere un valore finito).

In pratica fissate le condizioni geometriche e la portata, l'equazione fluidodinamica può essere risolta anche in maniera iterativa.

Imposto un valore di tentativo per la pressione dopo il tratto  $L$ , ( $p_2'$ ), si ottiene il corrispondente valore per la densità media, ( $d_{sm}'$ ), da cui:

$$Dp' = \frac{8 k_a G^2 L}{\pi^2 D^5 d_{sm}'}, \text{ con, in generale: } p_2' \neq p_1 - Dp'.$$

Posto come valore di secondo tentativo:  $p_2'' = p_1 - Dp'$ , si procede fino a verificare la condizione:  $p_2^{(n)} \approx p_1 - Dp^{(n-1)}$ .



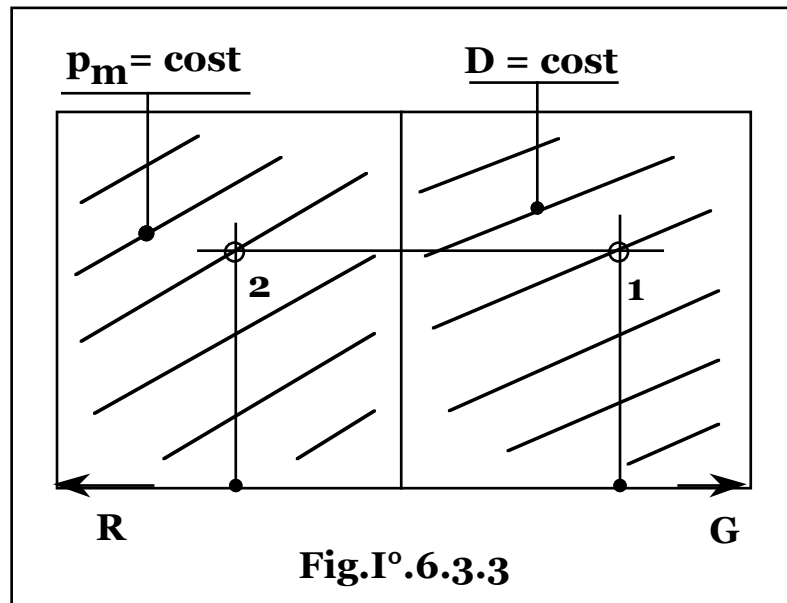
Per il dimensionamento della condotta viene imposta una perdita di carico globale o per unità di lunghezza di tubazione, ( $Dp = RL$ ), accettabile, da cui:  $d_{sm} = 1/2[d_s(p_1, T_1) + d_s(p_1 - Dp, T_1)]$ , e quindi:

$$D = \sqrt[5]{\frac{8k_a G^2 L}{\pi^2 d_{sm} Dp}} = \sqrt[5]{\frac{8k_a G^2}{\pi^2 d_{sm} R}}$$

Per i gas o vapori surriscaldati per i quali si ha:  $d_s = d_s(p, T)$ , le relazioni sono graficate in diagrammi ad eliminazione successiva di variabili, (**Fig.I°6.3.2**).

Nota la temperatura, ( $T_1$ ), e la pressione media, ( $p_m$ ), si determina il punto **1**, (ovvero si elimina come variabile la densità media del fluido); fissati, (o eliminati), la portata, (punto **2**), e il diametro della condotta, (punto **3**), il sistema risulta definito nel suo valore di perdita di carico per unità di lunghezza, ( $R$ ), (ovvero fissate due delle tre grandezze si ricava la rimanente).

In caso di vapori saturi si ha:  $d_s = d_s(p)$ , e nei relativi diagrammi, (**Fig.I°6.3.3**), appare una variabile in meno: note tre delle quattro variabili, (portata, diametro, pressione media e perdita di carico), si risale alla rimanente.



#### § I°.6.4 – PERDITE DI CARICO CONCENTRATE.

Si indicano come concentrate le perdite di carico non imputabili a fenomeni di attrito fluidodinamico e quindi distribuite lungo tutte le condotte, ma a perturbazioni localizzate del flusso, dovute a disuniformità geometriche o accidentalità inserite nella linea.

Le perdite di carico concentrate, ( $Dp_c$ ), sono quantificabili con la

relazione:  $Dp_c = k_c d_s \frac{c^2}{2} = \frac{8k_c d_s Q^2}{\pi^2 D^4} = \frac{8k_c G^2}{\pi^2 D^4 d_s}$ , che permette di

esprimerle in funzione dell'energia cinetica specifica del fluido, ( $c^2/2$ ), e che risulta la definizione dei coefficienti di accidentalità, ( $k_c$ ), che appaiono sufficientemente costanti.

Le perdite di carico concentrate possono esprimersi anche in termini di lunghezza equivalente, ( $L_e$ ), definita come la lunghezza di tubazione rettilinea, di sezione costante e priva di accidentalità, che per attriti fluidodinamici comporta perdite di carico, ( $Dp$ ), pari a quelle indotte dalla accidentalità stessa.

Risulta quindi:  $Dp = k_c d_s c^2/2 = k_a d_s c^2 L_e/2D$ , da cui:  $L_e = k_c D/k_a$ .

#### § I°.6.5 – TUBAZIONE APERTA SEMPLICE E A PIU' RAMI IN PARALLELO.

**Tubazione aperta semplice.**

La perdita di carico totale in una tubazione aperta a un solo ramo, per fluidi incomprimibili, (e comprimibili previa stima della densità media del fluido nei singoli tratti della condotta,  $d_{smi}$ ), vale:

$$D_p = \sum_{i=1}^n \left( \frac{8k_a d_{smi} L_i}{\pi^2 D_i^5} + \frac{8d_{smi}}{\pi^2 D_i^4} \sum_{j=1}^{m_i} k_{cij} \right) Q^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left( \frac{8k_a L_i}{\pi^2 D_i^5 d_{smi}} + \frac{8}{\pi^2 D_i^4 d_{smi}} \sum_{j=1}^{m_i} k_{cij} \right) G^2,$$

con: **n** numero di tronchi di tubazione a diametro costante, ( $D_i$ ), e lunghezza  $L_i$ ;

**$m_i$**  numero di accidentalità presenti nell'*i*esimo tronco;

**$k_{cij}$**  *j*esimo coefficiente di accidentalità presente nell'*i*esimo tronco.

Indicando come lunghezza estrapolata dell'*i*esimo tronco, ( $L_i'$ ), la

grandezza:  $L_i' = L_i + \sum_{j=1}^{m_i} L_{eij} = L_i + \sum_{j=1}^{m_i} \frac{k_{cij} D_i}{k_a}$ , con:  $L_{eij} = k_{cij} D_i / k_a$ ,

*j*esima lunghezza equivalente dell'*i*esimo tronco, si ottiene:

$$D_p = \sum_{i=1}^n \frac{8k_a d_{smi} L_i'}{\pi^2 D_i^5} Q^2 = \sum_{i=1}^n \frac{8k_a L_i'}{\pi^2 D_i^5 d_{smi}} G^2.$$

Definito il coefficiente di incidenza delle perdite concentrate rispetto a quelle distribuite nell'*i*esimo tronco, ( $f_{ci}$ ), come il rapporto:

$$f_{ci} = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} L_{eij}}{L_i},$$

si ottiene:  $D_p = \sum_{i=1}^n \frac{8k_a d_{smi} (1 + f_{ci}) L_i}{\pi^2 D_i^5} Q^2 = \sum_{i=1}^n \frac{8k_a (1 + f_{ci}) L_i}{\pi^2 D_i^5 d_{smi}} G^2.$

In caso di tubazione a diametro costante, si ha:

$$\begin{aligned}
Dp &= \left( \frac{8k_a d_{sm} L}{\pi^2 D^5} + \frac{8d_{sm}}{\pi^2 D^4} \sum_{j=1}^m k_{cj} \right) Q^2 = \\
&= \left( \frac{8k_a L}{\pi^2 D^5 d_{sm}} + \frac{8}{\pi^2 D^4 d_{sm}} \sum_{j=1}^m k_{cj} \right) G^2 = \\
&= \frac{8k_a d_{sm} (1 + f_c) L}{\pi^2 D^5} Q^2 = \frac{8k_a (1 + f_c) L}{\pi^2 D^5 d_{sm}} G^2.
\end{aligned}$$

### **Tubazioni aperte a più rami in parallelo.**

In un tratto di tubazione di lunghezza **L** e diametro **D** che collega due punti di un circuito fra i quali si ha una differenza di pressione **Dp**, si

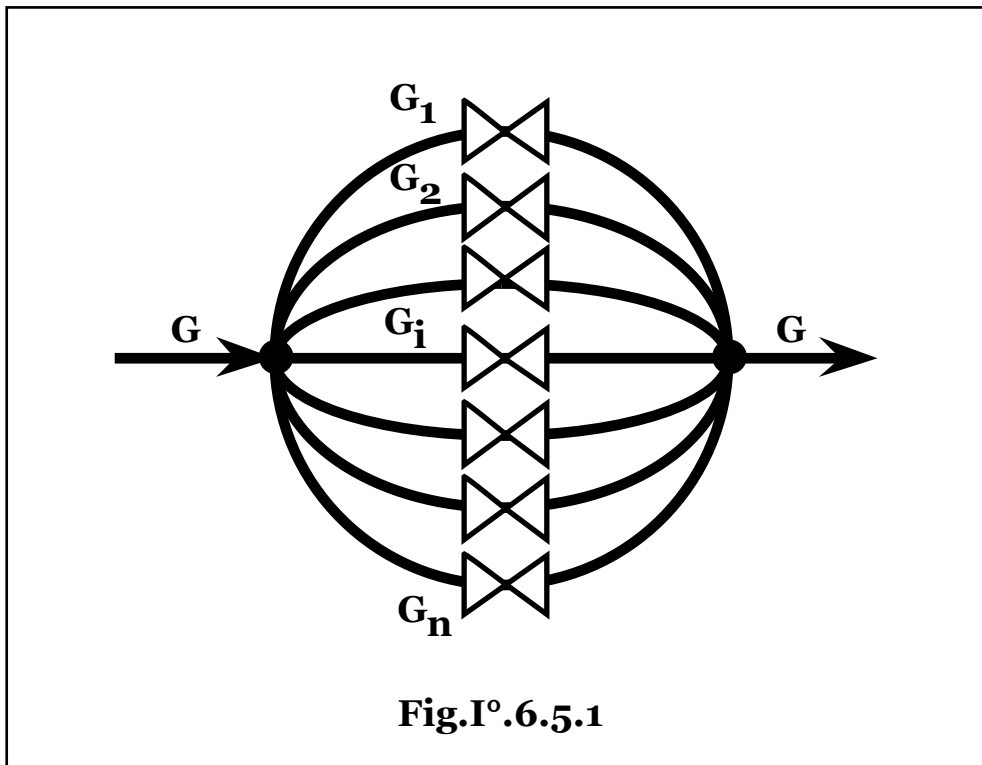
ha: **Dp = I<sub>f</sub>G<sup>2</sup>**, da cui: **G =  $\sqrt{\frac{Dp}{I_f}}$** , con il parametro: **I<sub>f</sub> =  $\frac{8k_a(1 + f_c)}{\pi^2 d_{sm}} \frac{L}{D^5}$** ,

che assume il significato di impedenza fluidodinamica della tubazione.

Supposto di collegare i punti del circuito con **n** tratti in parallelo, di diametri **D<sub>i</sub>** e lunghezze **L<sub>i</sub>**, ognuno di questi è attraversato da una

portata **G<sub>i</sub>**, (**Fig.I°.6.5.1**), tale che: **G<sub>i</sub> =  $\sqrt{\frac{Dp}{I_{fi}}}$** ,

con: **I<sub>fi</sub> =  $\frac{8k_a(1 + f_c)}{\pi^2 d_{sm}} \frac{L_i}{D_i^5}$** .



La portata totale:  $G = \sum_{i=1}^n G_i$ , risulta quindi pari a:

$$G = \sqrt{Dp} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{I_{fi}}} = \pi \sqrt{\frac{Dp d_{sm}}{8k_a(1+f_c)}} \sum_{i=1}^n \frac{D_i^{5/2}}{L_i^{1/2}},$$

e nel caso in cui le tubazioni abbiano la stessa geometria:

$$G = n \pi \sqrt{\frac{Dp d_{sm} D^5}{8k_a(1+f_c)L}}.$$

Il diametro di una tubazione semplice equivalente alla serie delle tubazioni in parallelo, ( $D_{eq}$ ), di lunghezza  $L_o$ , si ottiene dalla relazione:

$$G = \sqrt{\frac{Dp}{I_{fo}}}, \text{ con: } I_{fo} = \frac{8k_a(1+f_c)L_o}{\pi^2 D_{eq}^5 d_{sm}}, \text{ da cui: } \frac{D_{eq}^{5/2}}{L_o^{1/2}} = \sum_{i=1}^n \frac{D_i^{5/2}}{L_i^{1/2}},$$

ovvero in caso di tubazioni di pari geometria:  $D_{eq} = n^{2/5} D$ .



La sezione di passaggio risulta pertanto:  $\frac{\pi}{4} D_{eq}^2 = \frac{\pi}{4} n^{4/5} D^2$ , a fronte di quella relativa alla serie di tubazioni in parallelo:  $n \frac{\pi}{4} D^2$ , con rapporto:  $1/n^{1/5}$ , da cui un incremento di velocità del fluido:  $n^{1/5}$ .

Qualora in una sezione di circuito composto da  $n$  tubazioni in parallelo,  $m$  di queste vengano escluse, (come nel caso di più organi di intercettazione in parallelo, o gruppi di pompaggio composti da più pompe in parallelo), a parità di salto di pressione disponibile, (o imposto), la portata totale circolante, ( $G_{n-m}$ ), diviene:

$$G_{n-m} = \sqrt{Dp} \sum_{i=1}^{(n-m)} \frac{1}{\sqrt{I_{fi}}} = \pi \sqrt{\frac{Dp d_{sm}}{8k_a(1+f_c)}} \sum_{i=1}^{(n-m)} \frac{D_i^{5/2}}{L_i^{1/2}},$$

con una diminuzione, ( $G_m$ ), pari a:

$$G_m = \pi \sqrt{\frac{Dp d_{sm}}{8k_a(1+f_c)}} \sum_{i=(n-m+1)}^n \frac{D_i^{5/2}}{L_i^{1/2}}.$$

Risulta quindi, un aumento di impedenza, ( $DI_f$ ), ovvero un incremento della curva caratteristica del circuito, pari a:

$$DI_f = \frac{Dp}{G_m^2} = \frac{8k_a(1+f_c)}{\pi^2 d_{sm} \left( \sum_{i=(n-m+1)}^n \frac{D_i^{5/2}}{L_i^{1/2}} \right)^2},$$

da compensare, per mantenere la medesima portata totale, con una complementare variazione delle curva di prevalenza del gruppo di pompaggio, o con una pari variazione, ( $DI_f$ ), del coefficiente di perdita di uno o più organi di regolazione inseriti nel circuito, che al pari della impedenza fluidodinamica risultano coefficienti di proporzionalità fra le perdite di carico concentrate e il quadrato della portata.

In caso di tratti in parallelo di pari geometria, alla chiusura di  $m$  degli  $n$

rami, si ottiene una perdita di portata:  $G_m = m\pi \sqrt{\frac{Dp d_{sm} D^5}{8k_a(1+f_c)L}}$ , pari a:

$(m/n)G$ , ovvero proporzionale al numero dei rami esclusi, con:

$DI_f = \frac{Dp}{G_m^2} = \frac{8k_a(1+f_c)}{m^2 \pi^2 d_{sm}} \frac{L}{D^5}$ , e in caso di due tubazioni una perdita di portata pari a:  $1/2 G$ .

## § I°.6.6 – DIAMETRO ECONOMICO DI UNA TUBAZIONE.

Nel dimensionamento di una linea fluidodinamica, nota la planimetria e la portata da elaborare, rimane un grado di libertà per la scelta del diametro della tubazione, (o della velocità del fluido).

Le velocità dei fluidi nelle condotte sono limitate inferiormente da possibilità di sedimentazione, alle basse velocità, di eventuali impurità presenti nei fluidi con conseguente diminuzione della sezione di passaggio fino alla ostruzione della luce, aumento delle perdite di carico, danni e malfunzionamenti agli accessori di linea con necessità di interventi di smontaggio e pulizia e superiormente da problemi di vibrazioni, rumorosità e abrasioni delle particelle in sospensione sulle condotte, alle alte velocità.

Nell'intervallo di accettabilità tecnica, tuttavia, il sistema è passibile di ottimizzazione economica. Infatti al variare del diametro delle tubazioni variano gli oneri di installazione delle condotte e, in funzione delle corrispondenti variazioni di perdite di carico, gli oneri di installazione ed esercizio dei gruppi di pompaggio.

Indicando con  $q_p$  e  $q_t$  i costi specifici del gruppo di pompaggio, (comprensivo delle macchine operatrici e dei motori di guida), per unità di potenza utile, ( $P$ ), e delle condotte per unità di massa dei relativi materiali costruttivi, il costo totale di installazione del sistema risulta:  $I = q_p P + q_t d_{st} V_t$ , con  $d_{st}$  e  $V_t$  densità e volume del materiale costruttivo delle tubazioni, rispettivamente.

La potenza utile del gruppo di pompaggio, vale:

$$P(D) = Q \frac{D_p}{h_p} = \frac{8k_a(1+f_c)L}{h_p \pi^2 D^5 d_{sm}^2} G^3,$$

con  $h_p$  rendimento globale del gruppo di pompaggio.

Il volume del materiale costruttivo delle tubazioni risulta:

$$V_t = \pi(r_e^2 - r_i^2)L = \pi(r_e + r_i)(r_e - r_i)L \approx \pi D s L,$$

con:  $s = (r_e - r_i)$ , spessore della tubazione.

Lo spessore  $s$  di una tubazione dipende dal diametro della stessa secondo una relazione monomia del tipo:  $s = k D^a$ , con  $a \sim 1/3$ .

E' tuttavia possibile adottare una relazione lineare:  $s = r_d D$ , ponendo il rapporto spessore diametro:  $r_d = k D^{-2/3} = r_d(D) = \text{costante}$ , una volta che sia stimato approssimativamente il diametro della tubazione.

Si ottiene, quindi:  $V_t = \pi L r_d D^2$ , da cui:

$$I(D) = \frac{q_p 8k_a(1+f_c)LG^3}{h_p \pi^2 d_{sm}^2} \frac{1}{D^5} + q_t d_{st} \pi L r_d D^2.$$

Il costo totale attualizzato, ( $C_{ta}$ ), del sistema risulta quindi:

$$\begin{aligned} C_{ta}(D) &= \frac{P(D)uT}{t_{ek}} c_k + \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) I(D) = \\ &= \frac{8k_a(1+f_c)LG^3}{h_p \pi^2 d_{sm}^2} \frac{uTc_k}{t_{ek}} \frac{1}{D^5} + \\ &+ \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) \left( \frac{q_p 8k_a(1+f_c)LG^3}{h_p \pi^2 d_{sm}^2} \frac{1}{D^5} + q_t d_{st} \pi L r_d D^2 \right) = \\ &= \frac{8k_a(1+f_c)LG^3}{h_p \pi^2 d_{sm}^2} \left[ \frac{uTc_k}{t_{ek}} + q_p \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) \right] \frac{1}{D^5} + \\ &+ \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) q_t d_{st} \pi L r_d D^2, \end{aligned}$$

con:  $c_k$  e  $t_{ek}$  costo specifico e tasso di ammortamento effettivo dell'energia impiegata per la guida del gruppo di pompaggio, rispettivamente.

Posto: 
$$\frac{dC_{ta}(D)}{dD} = \frac{uTc_k}{t_{ek}} \frac{dP(D)}{dD} + \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) \frac{dI(D)}{dD} = 0,$$

l'equazione di ottimizzazione economica risulta:

$$\begin{aligned} &- \frac{40k_a(1+f_c)LG^3}{h_p \pi^2 d_{sm}^2} \left[ \frac{uTc_k}{t_{ek}} + q_p \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) \right] \frac{1}{D^6} + \\ &+ 2 \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right) q_t d_{st} \pi L r_d D = 0, \end{aligned}$$

da cui il diametro economico della tubazione, ( $D_{ec}$ ):

$$D_{ec} = \sqrt[7]{20 \left[ \frac{uTc_k}{t_{ek} \left(1 + \frac{a}{t_{em}}\right)} + q_p \right] \frac{k_a(1+f_c)G^3}{q_t d_{st} r_d h_p d_{sm}^2 \pi^3}}.$$

Nel caso più generale, la potenza del gruppo di pompaggio è comprensiva delle quote relative alla prevalenza geodetica, (o salto di quota):  $Dp_g = g d_{sm} H_g$ , con  $H_g$  salto totale di quota agli estremi della

tubazione, all'eventuale aumento di pressione richiesto dall'utenza, ( $\mathbf{Dp_u}$ ), e a eventuali specifiche relative alla velocità di uscita, ( $\mathbf{c_u}$ ), che si traducono in variazioni di pressione, ( $\mathbf{Dp_c}$ ), a monte di un tratto finale di tubazione a sezione convergente o divergente che risulta:

$$\frac{\mathbf{Dp_c}}{\mathbf{d_{sm}}} = \frac{\mathbf{c_u^2 - c^2}}{2} = \frac{8\mathbf{G^2}}{\mathbf{d_{sm}^2 \pi^2}} \left( \frac{1}{\mathbf{D_u^4}} - \frac{1}{\mathbf{D^4}} \right),$$

con:  $\mathbf{c_u}$  e  $\mathbf{D_u} = \sqrt{\frac{4\mathbf{G}}{\pi \mathbf{d_{sm} c_u}}}$ , velocità del fluido richiesta all'utenza e relativo diametro di sbocco.

Si ottiene, quindi:  $\mathbf{P(D)} = \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{h_p d_{sm}}} (\mathbf{Dp} + \mathbf{Dp_g} + \mathbf{Dp_u} + \mathbf{Dp_c})$ ;

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{dP(D)}}{\mathbf{dD}} &= \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{h_p d_{sm}}} \left( \frac{\mathbf{dDp(D)}}{\mathbf{dD}} + \frac{\mathbf{dDp_g}}{\mathbf{dD}} + \frac{\mathbf{dDp_u}}{\mathbf{dD}} + \frac{\mathbf{dDp_c(D)}}{\mathbf{dD}} \right) = \\ &= \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{h_p d_{sm}}} \left[ -\frac{40\mathbf{k_a(1 + f_c)LG^2}}{\mathbf{d_{sm}^2 \pi^2}} \frac{1}{\mathbf{D^6}} + \frac{32\mathbf{G^2}}{\mathbf{d_{sm}^2 \pi^2}} \frac{1}{\mathbf{D^5}} \right], \end{aligned}$$

essendo:  $\frac{\mathbf{dDp_g}}{\mathbf{dD}} = \frac{\mathbf{dDp_u}}{\mathbf{dD}} = 0$ .

L'equazione di ottimizzazione economica:

$$\frac{\mathbf{dC_{ta}(D)}}{\mathbf{dD}} = \frac{\mathbf{uTc_k}}{\mathbf{t_{ek}}} \frac{\mathbf{dP(D)}}{\mathbf{dD}} + \left( 1 + \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{t_{em}}} \right) \left[ \mathbf{q_p} \frac{\mathbf{dP(D)}}{\mathbf{dD}} + 2\pi \mathbf{q_t d_{st} r_d L D} \right] = 0,$$

risulta, quindi:

$$\left\{ \frac{40\mathbf{k_a(1 + f_c)G^3}}{\mathbf{h_p \pi^2 d_{sm}^2}} \right\} - \left\{ \frac{32\mathbf{G^3}}{\mathbf{h_p \pi^2 d_{sm}^2 L}} \right\} \mathbf{D} = \left\{ \frac{2\pi \mathbf{q_t d_{st} r_d}}{\mathbf{q_p + \frac{uTc_k}{t_{ek} \left( 1 + \frac{a}{t_{em}} \right)}}} \right\} \mathbf{D^7},$$

ovvero:  $\mathbf{c_1 - c_2 D = c_3 D^7}$ , la cui soluzione può essere rappresentata graficamente dall'intersezione della retta a primo membro con la polinomiale del settimo ordine a secondo, (**Fig.I°.6.6.1**).

In assenza del termine cinetico, ( $\mathbf{Dp_c = 0}$ ), si ha:  $\mathbf{c_2 = 0}$ , e la retta diviene orizzontale, fornendo la soluzione  $\mathbf{D_{ec}}$ .

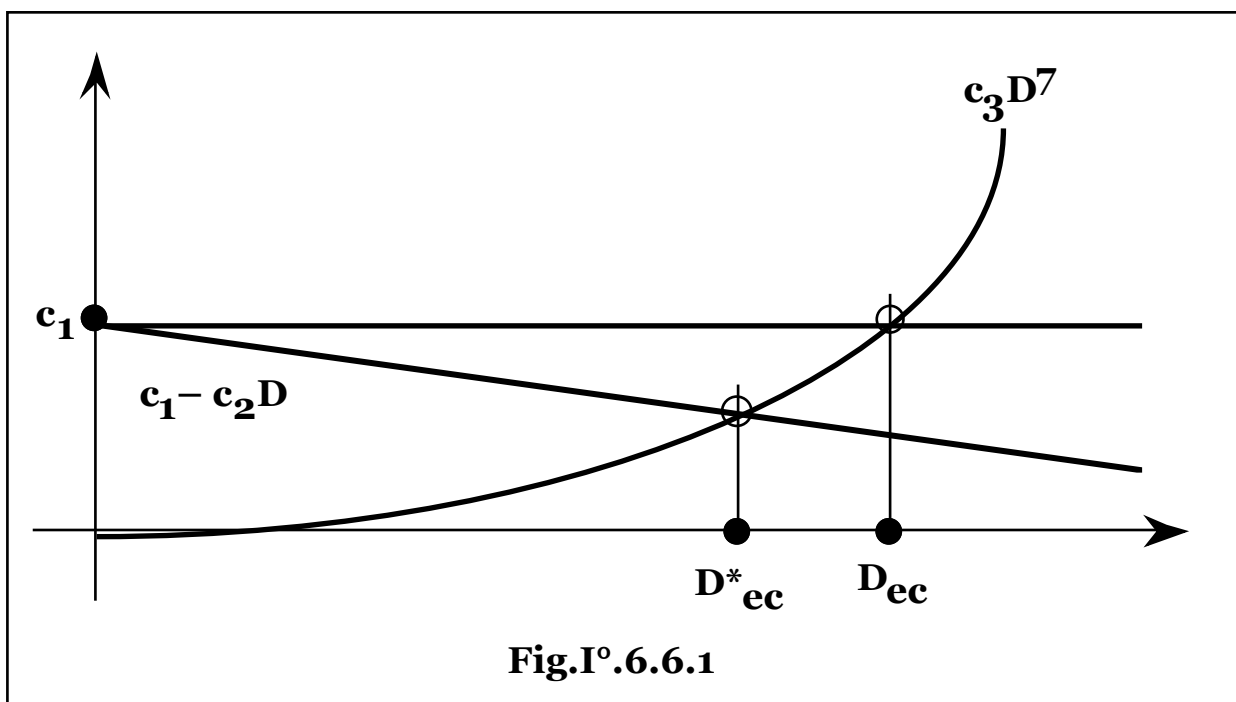
Rispetto al caso in cui sia assente il termine cinetico, si ottiene, quindi, una diminuzione del diametro economico della tubazione.

Infatti nell'ottimizzazione economica che contrappone un termine inversamente proporzionale al diametro della condotta, ( $1/D^5$ ), a uno proporzionale al diametro stesso, ( $D^2$ ), si inserisce un termine ancora inversamente proporzionale al diametro, ma negativo, ( $-1/D^4$ ), che sposta quindi il valore ottimo nella direzione di una sua crescita, ovvero a diametri inferiori, (per  $c_u > c$ , nel tratto finale è richiesto un aumento di pressione per cui il termine cinetico, che deve risultare positivo, vale:

$$\frac{Dp_c}{d_{sm}} = \frac{c_u^2 - c^2}{2} = \frac{8G^2}{d_{sm}^2 \pi^2} \left( \frac{1}{D_u^4} - \frac{1}{D^4} \right) > 0, \text{ essendo: } D_u < D, \text{ mentre per}$$

per  $c_u < c$ , nel tratto finale è richiesta una diminuzione di pressione per cui il termine cinetico, che deve risultare negativo, è ancora pari a:

$$\frac{Dp_c}{d_{sm}} = \frac{c_u^2 - c^2}{2} = \frac{8G^2}{d_{sm}^2 \pi^2} \left( \frac{1}{D_u^4} - \frac{1}{D^4} \right) < 0, \text{ essendo in tal caso: } D_u > D).$$



### Costo del trasporto idraulico.

Il sistema può essere valutato anche nella sua globalità, assegnando un valore al trasporto del fluido.

In tal caso, indicando con  $c_{tr}$ , il costo specifico del trasporto, il **VAN** dell'investimento risulta pari all'utile attualizzato:  $\frac{GuTc_{tr}}{t_e}$ , meno tutti gli oneri, ovvero il costo totale attualizzato:  $VAN(D) = \frac{GuTc_{tr}}{t_e} - C_{ta}(D)$ .

Nel caso il costo specifico sia quello di mercato, si valuta la condizione economica per l'investimento, ( $VAN > 0$ ), mentre qualora risulti la variabile da calcolare, posto:  $VAN(c_{tr}) = 0$ , si ottiene:

$$c_{tr}(D) = \frac{C_{ta}(D)t_e}{GuT} = \frac{8k_a(1+f_c)LG^2}{h_p\pi^2d_{sm}^2} \left[ c_k + \frac{t_eq_p}{uT} \left( 1 + \frac{a}{t_{em}} \right) \right] \frac{1}{D^5} + \left( 1 + \frac{a}{t_{em}} \right) \frac{t_eq_t d_{st} \pi L r_d D^2}{GuT}.$$

Differendo le funzioni **VAN** e **C<sub>ta</sub>**, solo per una costante, le condizioni di ottimizzazione coincidono.

Risulta, inoltre:  $\frac{dVAN(D)}{dD} = -\frac{dC_{ta}(D)}{dD}$ , in quanto la prima condizione corrisponde a un massimo della funzione e la seconda a un minimo.

### § I°.6.7 - DIMENSIONAMENTO DI RETI FLUIDODINAMICHE APERTE METODO DEL RAMO PRINCIPALE.

Una rete aperta comunque complessa consiste in una serie di successive ramificazioni a partire dalla condotta di adduzione iniziale fino alle diverse utenze e comprende quindi sezioni, (nodi), nelle quali la portata si ripartisce nei diversi rami a seconda dell'impedenza fluidodinamica che ogni via oppone al passaggio del fluido, ovvero della perdita di carico per unità di lunghezza:  $R = - dp/dL$ .

Il dimensionamento della rete consiste pertanto nella determinazione di quei diametri delle diverse tubazioni, (che concorrono a formare l'impedenza stessa), tali per cui le portate risultino quelle richieste dalle utenze.

Si indica come **ramo principale**, (**RP**), di una rete aperta comunque complessa, (**Fig.I°.6.7.1**), quel tratto compreso fra la sezione iniziale di pompaggio e una delle sezioni terminali, che appare per geometria e costituzione, il più sfavorito, ovvero affetto dalle maggiori perdite di carico.

Il **metodo del ramo principale** consiste nel dimensionamento del ramo stesso come una condotta semplice, fissando un valore costante delle perdite di carico per unità di lunghezza geometrica, (**R**).

**Fluidi incomprimibili.**

Dall'espressione della perdita di carico per unità di lunghezza geometrica in ogni tratto **i**esimo:  $R = \frac{8k_a G_i^2}{d_s \pi^2 D_i^5}$ , note le rispettive

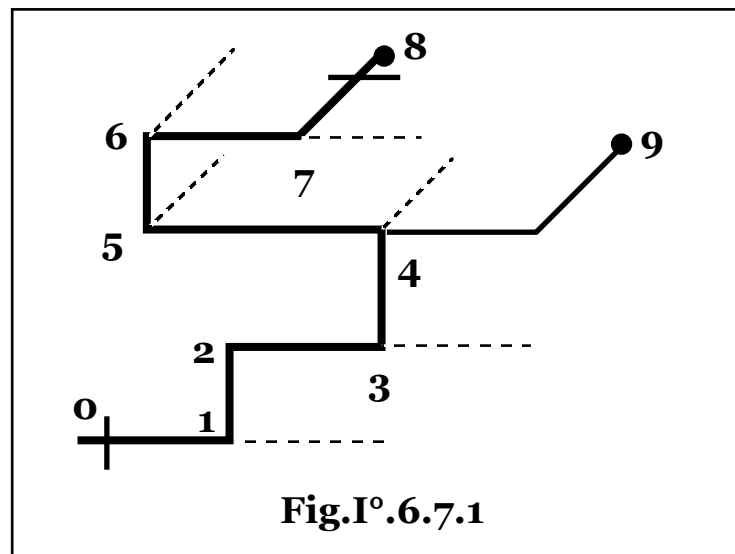
portate, i corrispondenti diametri delle tubazioni si ottengono dal

sistema di equazioni indipendenti:  $D_i^5 = \frac{8k_a G_i^2}{d_s \pi^2 R}$ , (**i = 1, 2, ..., n**),

con **n** numero di tratti a sezione costante del ramo principale, ovvero:

$$D_i^5 = \frac{8k_a(1 + f_{ci})G_i^2}{d_s \pi^2 R}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

in caso si tenga conto anche delle perdite di carico concentrate.



E' evidente come sia equivalente considerare la perdita di carico per

unità di lunghezza geometrica:  $R = \frac{8k_a G_i^2}{d_s \pi^2 D_i^5}$  e inserire l'effetto delle

perdite di carico concentrate nella relazione di dimensionamento:

$$D_i^5 = \frac{8k_a(1 + f_{ci})G_i^2}{d_s \pi^2 R}, \text{ o considerare la perdita di carico estrapolata:}$$

$$R = \frac{8k_a(1 + f_{ci})G_i^2}{d_s \pi^2 D_i^5}, \text{ da cui direttamente la medesima relazione di}$$

dimensionamento, senza ulteriori correzioni.

Note la pressione richiesta all'utenza e la geometria della rete, fissata la perdita di carico per unità di lunghezza, (**R**), risulta nota la pressione, (**p<sub>i</sub>**), in ogni nodo del ramo stesso, (o più in generale in ogni sua

$$\text{sezione): } p_i = p_o - R \sum_0^i (1 + f_{ci})L_i - \sum_0^i Dp_{gi},$$

$$\text{con: } \sum_0^i (1 + f_{ci})L_i \text{ lunghezza totale estrapolata dalla sezione di}$$

pompaggio all'**i**esimo nodo;

$$\sum_0^i Dp_{gi} \text{ perdita geodetica globale dalla sezione di}$$

pompaggio all'**i**esimo nodo,

e poichè la pressione richiesta alla mandata della sezione di pompaggio, (**p<sub>o</sub>**), risulta: **p<sub>o</sub>** = (**p<sub>u</sub>**)**<sub>RP</sub>** + (**Dp<sub>g</sub>**)**<sub>RP</sub>** + **R**(**1 + f<sub>c</sub>**)**L<sub>RP</sub>**,

con: (**p<sub>u</sub>**)**<sub>RP</sub>** pressione richiesta all'utenza collegata al ramo principale;

(**Dp<sub>g</sub>**)**<sub>RP</sub>** perdita geodetica globale lungo tutto il ramo principale;

**R**(**1 + f<sub>c</sub>**)**L<sub>RP</sub>** perdite di carico globali lungo tutto il ramo principale;

**f<sub>c</sub>** valore medio del coefficiente **f<sub>ci</sub>**,

si ottiene:

$$p_i = (p_u)_{RP} + (Dp_g)_{RP} - \sum_0^i Dp_{gi} + R \left[ (1 + f_c)L_{RP} - \sum_0^i (1 + f_{ci})L_i \right].$$

Per ogni ramo secondario compreso fra l'**i**esimo nodo del ramo principale e la **k**esima utenza, risulta dunque imposta la perdita di carico per unità di lunghezza geometrica, (**R<sub>ik</sub>**), disponibile, pari a:



$$R_{ik} = \frac{p_i - D_{pgik} - (p_u)_k}{L_{ik}},$$

con:  $D_{pgik}$  perdita geodetica totale nel ramo secondario  $ik$ ;  
 $(p_u)_k$  pressione richiesta dalla  $k$ esima utenza;  
 $L_{ik}$  lunghezza totale del ramo secondario  $ik$ .

Il dimensionamento di ogni ramo secondario con origine nell' $i$ esimo nodo è, pertanto, ottenibile ancora col metodo del ramo principale considerando il suddetto ramo in maniera indipendente, con la condizione che la perdita di carico per unità di lunghezza sia pari a quella disponibile, ( $R_{RPI}$ ), con riferimento al tratto più sfavorito a partire dal suddetto nodo, (ramo principale dall' $i$ esimo nodo,  $RPI$ ), e cioè col sistema di equazioni indipendenti, (comprehensive delle perdite di

carico concentrate):  $D_j^5 = \frac{8k_a(1 + f_{cj})G_j^2}{d_s \pi^2 R_{RPI}}$ , ( $j = 1, 2, \dots n_i$ ), con  $n_i$

numero di tratti a sezione costante del nuovo ramo principale  $RPI$ .

Imposta la perdita di carico  $R_{RPI}$ , (e note la pressione richiesta all'utenza finale e la geometria della rete), risulta, quindi, ancora nota la pressione, ( $p_j$ ), in ogni nodo del ramo  $RPI$ , (o più in generale in ogni sua

sezione):  $p_j = p_i - R_{RPI} \sum_i^j (1 + f_{cj})L_j - \sum_i^j D_{pgj}$ , con:  $\sum_i^j (1 + f_{cj})L_j$  e

$\sum_i^j D_{pgj}$ , lunghezza totale estrapolata e perdita geodetica globale, dall' $i$ esimo al  $j$ esimo nodo, per cui il procedimento può essere completato fino ai rami semplici terminali.

In un generico nodo in cui giungano  $n$  portate, ( $G_{ei}$ ), con velocità  $c_{ei}$ , ( $i = 1, 2, \dots n$ ), e ne escano  $m$ , ( $G_{uj}$ ), con velocità  $c_{uj}$ , ( $j = 1, 2, \dots m$ ), per il principio di conservazione dell'energia, deve mantenersi fra monte e valle, l'energia cinetica, (l'unica che può subire variazioni), con ogni aumento/diminuzione in ogni ramo, globalmente compensato da corrispondenti diminuzioni/aumenti negli altri a effetto totale nullo:

$$\sum_{i=1}^n G_{ei} \frac{c_{ei}^2}{2} = \sum_{j=1}^m G_{uj} \frac{c_{uj}^2}{2}, \text{ con: } \sum_{i=1}^n G_{ei} = \sum_{j=1}^m G_{uj}, \text{ con energia cinetica}$$

specific media in ingresso,  $(\frac{c_{em}^2}{2})$ , pari a quella in uscita,  $(\frac{c_{um}^2}{2})$ :

$$\frac{c_{em}^2}{2} = \frac{\sum_{i=1}^n G_{ei} \frac{c_{ei}^2}{2}}{\sum_{i=1}^n G_{ei}} = \frac{\sum_{j=1}^m G_{uj} \frac{c_{uj}^2}{2}}{\sum_{j=1}^m G_{uj}} = \frac{c_{um}^2}{2}.$$

La medesima relazione, essendo:  $\frac{c^2}{2} = \frac{8G^2}{d_s^2 \pi^2 D^4}$ ;  $R = k_a \frac{d_s}{D} \frac{c^2}{2}$ ,

assume anche le forme:  $\sum_{i=1}^n \frac{G_{ei}^3}{D_{ei}^4} = \sum_{j=1}^m \frac{G_{uj}^3}{D_{uj}^4}$ ;

$$\sum_{i=1}^n R_{ei} G_{ei} D_{ei} = \sum_{j=1}^m R_{uj} G_{uj} D_{uj}; \quad \sum_{i=1}^n R_{ei}^{(4/5)} G_{ei}^{(7/5)} = \sum_{j=1}^m R_{uj}^{(4/5)} G_{uj}^{(7/5)}.$$

### Fluidi comprimibili.

In tal caso non risulta possibile avere una perdita di carico per unità di lunghezza costante a meno di non aumentare con continuità il diametro della condotta stessa.

Infatti risolvendo l'espressione della perdita di carico per unità di

lunghezza:  $R = -\frac{dp}{dL} = \frac{\frac{8k_a G^2}{\pi^2 D^5 d_{s1}}}{\sqrt{1 - \frac{16k_a G^2 L}{\pi^2 D^5 p_1 d_{s1}}}}$ , in funzione del diametro, si

ottiene:  $D^5(L) = \frac{8k_a G^2 L}{\pi^2 p_1 d_{s1}} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{p_1^2}{R^2 L^2}} \right)$ , ovvero diametro variabile

con la distanza, per  $R = \text{costante}$ .

La perdita, che tende a infinito per  $L = L_{oc}$ , qualora  $R$  e/o  $L$  risultino sufficientemente limitati, ( $\frac{p_1}{RL} \gg 1$ ), diviene coincidente con la relazione

$$\text{valida per i fluidi incomprimibili: } D^5 \approx \frac{8k_a G^2 L}{\pi^2 p_1 d_{s1}} \left(1 + \frac{p_1}{RL}\right) \approx \frac{8k_a G^2}{\pi^2 R d_{s1}},$$

essendo in tal caso trascurabili le variazioni di densità.

Essendo in generale a partire da una generica pressione  $p_o$ :

$$Dp(L) = p_o \left(1 - \sqrt{1 - \frac{16k_a G^2 L}{\pi^2 D^5 d_{so} p_o}}\right), \text{ in ogni } i\text{-esimo tratto del ramo}$$

principale, il valore medio della perdita di carico per unità di lunghezza, risulta:

$$R = \frac{Dp(L_i)}{L_i} = \frac{p(i-1)}{L_i} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{16k_a G_i^2 L_i}{\pi^2 D_i^5 d_{s(i-1)} p(i-1)}}\right).$$

Supponendo fluidi assimilabili a gas, (o miscele di gas), perfetti e trasformazioni isoterme lungo ogni tratto, in generale si ha:

$$d_s(p, T) = \frac{p}{R_g T}, \text{ con } R_g \text{ costante, (eventualmente media), del fluido e}$$

$$\text{quindi: } d_{s(i-1)} = \frac{p(i-1)}{R_g T_i}, \text{ da cui:}$$

$$R = \frac{Dp(L_i)}{L_i} = \frac{p(i-1)}{L_i} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{16k_a G_i^2 L_i R_g T_i}{\pi^2 D_i^5 p(i-1)^2}}\right),$$

che risolta in funzione dei diametri dei singoli tratti, ( $D_i$ ), fornisce il sistema di equazioni indipendenti di dimensionamento dell'intero ramo

$$\text{principale: } D_i^5 = \frac{16k_a G_i^2 R_g T_i}{\pi^2 \left[2Rp(i-1) - L_i R^2\right]}, \quad (i = 1, 2, \dots, n_{RP}),$$

ovvero, tenuto conto delle perdite di carico concentrate:

$$D_i^5 = \frac{16k_a (1 + f_{ci}) R_g T_i G_i^2}{\pi^2 \left[2Rp(i-1) - L_i R^2\right]}, \quad (i = 1, 2, \dots, n_{RP}),$$

con: 
$$\mathbf{p}_{(i-1)} = (\mathbf{p}_u)_{\mathbf{RP}} + \left[ (\mathbf{Dp}_g)_{\mathbf{RP}} - \sum_0^{i-1} \mathbf{Dp}_{gi} \right] +$$

$$+ \mathbf{R} \left[ (1 + \mathbf{f}_c) \mathbf{L}_{\mathbf{RP}} - \sum_0^{i-1} (1 + \mathbf{f}_{ci}) \mathbf{L}_i \right].$$

Affinchè le grandezze assumano significato fisico, (reali e positive), deve

risultare: 
$$\frac{16k_a G_i^2 L_i R_g T_i}{\pi^2 D_i^5 p_{(i-1)}^2} \leq 1, \text{ da cui: } D_i^5 \geq \frac{16k_a G_i^2 L_i R_g T_i}{\pi^2 p_{(i-1)}^2}, \text{ con}$$

condizione limite: 
$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{p}_{(i-1)}}{\mathbf{L}_i} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{16k_a G_i^2 L_i R_g T_i}{\pi^2 D_i^5 p_{(i-1)}^2}} \right) = \frac{\mathbf{p}_{(i-1)}}{\mathbf{L}_i}.$$

Per diametri inferiori, infatti, al termine del tratto di tubazione la pressione diverrebbe negativa e la perdita di carico assumerebbe valori immaginari, (fisicamente per portata in massa e diametro della condotta finiti, alla pressione, e quindi densità, che tende a zero corrisponde una velocità di efflusso che tende all'infinito).

La condizione: 
$$D_i^5 = \frac{16k_a G_i^2 R_g T_i}{\pi^2 [2R p_{(i-1)} - L_i R^2]} \geq \frac{16k_a G_i^2 L_i R_g T_i}{\pi^2 p_{(i-1)}^2}, \text{ diviene:}$$

$[p_{(i-1)} - R L_i]^2 \geq 0$ , che tenuto conto delle soluzioni introdotte con l'elevazione al quadrato della relazione risolvente, risulta ancora:

$\mathbf{R} \leq \mathbf{p}_{(i-1)}/\mathbf{L}_i$ , per cui la relazione di dimensionamento mantiene comunque significato fisico, con diametro, (reale e positivo), che varia

da infinito per  $\mathbf{R} = 0$ , al suo valore minimo: 
$$D_i^5 = \frac{16k_a G_i^2 L_i R_g T_i}{\pi^2 p_{(i-1)}^2}, \text{ per:}$$

$\mathbf{R} = \mathbf{p}_{(i-1)}/\mathbf{L}_i$ , ovvero qualora la pressione al termine del tratto sia nulla, (il risultato non è incompatibile con una sezione infinita richiesta a pressione nulla, in quanto il diametro trovato è quello medio nel tratto di condotta e nel calcolo del suo valore come media pesata lungo la tubazione, la pressione risulta nulla solo nel tratto infinitesimo terminale).

Note la pressione richiesta all'utenza, la geometria della rete e i salti geodetici, fissata la perdita di carico per unità di lunghezza, ( $\mathbf{R}$ ), risulta

quindi ancora nota la pressione in tutti i suoi nodi e quindi la perdita di carico per unità di lunghezza geometrica, ( $R_{ik}$ ), disponibile per ogni ramo secondario compreso fra l' $i$ esimo nodo del ramo principale e la

$k$ esima utenza:  $R_{ik} = \frac{p_i - D_{pgik} - (p_u)_k}{L_{ik}}$ .

Il dimensionamento ogni ramo secondario con origine nell' $i$ esimo nodo è, pertanto, ottenibile ancora col metodo del ramo principale col sistema di equazioni indipendenti, (comprehensive dell'effetto delle perdite di carico concentrate):

$$D_j^5 = \frac{16k_a(1 + f_{cj})G_j^2 R_g T_j}{\pi^2 \left[ 2R_{RPi} p_{(j-1)} - L_j R_{RPi}^2 \right]}, \quad (j = 1, 2, \dots n_i),$$

con:  $p_{(j-1)} = (p_u)_{RPi} + \left[ (D_{pg})_{RPi} - \sum_0^{j-1} D_{pgj} \right] +$   
 $+ R_{RPi} \left[ (1 + f_c) L_{RPi} - \sum_0^{j-1} (1 + f_{cj}) L_j \right],$

con:  $R_{RPi}$  perdita di carico disponibile riferita al tratto più sfavorito a partire dal suddetto nodo, (ramo principale  $RPi$ );

$n_i$  numero di tratti a sezione costante del nuovo ramo principale  $RPi$ ;

$(p_u)_{RPi}$  pressione richiesta all'utenza collegata al ramo principale  $RPi$ ;

$R_{RPi}(1+f_c)L_{RPi}$  perdite di carico globali lungo tutto il nuovo ramo principale,

e di seguito fino ai rami semplici terminali.

In pratica data la comune modesta incidenza delle perdite di carico rispetto alle pressioni totali, è possibile supporre la densità costante in ogni tratto di condotta, ovvero variabile a gradini a partire da ogni nodo e utilizzare in ogni ramo il modello relativo ai fluidi incompressibili con valori medi di densità.

Supponendo trasformazioni isoterme in ogni tratto e indicando con  $T_i$  la temperatura assoluta media del fluido nell' $i$ esimo tratto a sezione

costante, si ha:  $d_{si} = \frac{p_i}{R_g T_i}$ , per cui i diametri delle tubazioni del ramo

principale comprensivi dell'effetto delle perdite di carico concentrate, si ottengono dal sistema di equazioni indipendenti:

$$D_i^5 = \frac{8k_a(1+f_{ci})G_i^2}{\pi^2 R} \frac{R_g T_i}{p_i}, \quad (i=1, 2, \dots, n), \text{ ovvero:}$$

$$D_i^5 = \frac{8k_a(1+f_{ci})R_g T_i G_i^2}{\pi^2 \left\{ R \left[ (p_u)_{RP} + (Dp_g)_{RP} - \sum_0^i Dp_{gi} \right] + R^2 \left[ (1+f_c)L_{RP} - \sum_0^i (1+f_{ci})L_i \right] \right\}}$$

Qualora si scelga per la pressione in ogni tratto il suo valore all'inizio del tratto stesso, si ottiene una sottostima del diametro della tubazione, (inversamente proporzionale alla pressione stessa), e viceversa in caso di scelta del suo valore al termine del tratto.

Può quindi essere scelto il valore medio di pressione e quindi densità:

$$d_{smi} = \frac{d_{s(i-1)} + d_{si}}{2} = \frac{1}{R_g T_i} \left[ \frac{p_{(i-1)} + p_i}{2} \right],$$

con i diametri delle tubazioni del ramo principale che si ottengono dal sistema di equazioni indipendenti, (comprehensive delle perdite di carico

concentrate):  $D_i^5 = \frac{8k_a(1+f_{ci})G_i^2}{d_{smi}\pi^2 R}, \quad (i=1, 2, \dots, n).$

Nota la pressione in ogni nodo del ramo principale, la perdita di carico per unità di lunghezza geometrica, ( $R_{ik}$ ), disponibile per ogni ramo secondario compreso fra l'*i*esimo nodo del ramo principale e la *k*esima

utenza risulta:  $R_{ik} = \frac{p_i - Dp_{gik} - (p_u)_k}{L_{ik}}$  e il dimensionamento di ogni

ramo secondario con origine nell'*i*esimo nodo è, pertanto, ottenibile ancora col metodo del ramo principale.

In teoria qualunque tratto fra la sezione iniziale e un'utenza terminale potrebbe essere scelto come ramo principale, dimensionando i rami secondari in base alle conseguenti perdite disponibili.

In tal caso tuttavia non sarebbe più verificata la disuguaglianza:

$R_{ik} > R$ , ovvero perdite disponibili maggiori di quelle del ramo principale e a partire dall'*i*esimo nodo, il carico totale richiesto nel ramo secondario potrebbe risultare maggiore rispetto al ramo principale con

possibilità di valori risultanti della perdita  $R_{ik}$  tali da richiedere inaccettabili sovradimensionamenti della rete, o addirittura valori:  $R_{ik} < 0$ , con impossibilità di convogliare le portate richieste.

In pratica pertanto, qualora si verifichi la condizione  $R_{ik} < R$ , risulta evidentemente errata la scelta del ramo principale che deve coincidere, dall'iesimo nodo, col ramo secondario  $ik$  stesso.

In presenza di atmosfera, il termine geodetico,  $(Dp_g)$ , risulta:

$$Dp_g = (d_s - d_{sa})gH_g,$$

con  $d_s$  e  $d_{sa}$  densità del fluido e dell'atmosfera, rispettivamente.

Si ha quindi:  $Dp_g \approx d_s g H_g$  per i liquidi,  $Dp_g = 0$ , per aria e generalmente trascurabile per i gas in comuni condizioni di impianto.

In ogni caso risultando le cadute di pressione per perdite di carico,  $(Dp_r)$ :  $Dp_r \propto 1/d_s$  e  $Dp_g \propto d_s$ , si ha:  $Dp_g/Dp_r \propto d_s^2$  e quindi, a parità di altre condizioni, l'incidenza delle cadute di pressione per salti geodetici rispetto alle perdite di carico si riduce, passando da fluidi incomprimibili a fluidi comprimibili, di circa cinque – sei ordini di grandezza e quindi per fluidi comprimibili le perdite geodetiche risultano comunemente trascurabili.

Nel dimensionamento tecnico basato sul metodo del ramo principale, l'unica variabile, (o grado di libertà), impostabile arbitrariamente, (nel rispetto delle caratteristiche tecniche di funzionamento della rete, come le velocità di efflusso nelle condotte), risulta la perdita di carico per unità di lunghezza nel ramo principale,  $(R)$ , in funzione della quale si ottiene la pressione  $p_o$ , e quindi la potenza del gruppo di pompaggio da installare e parimenti risultano funzione di  $R$  le pressioni nei nodi da cui tutti i diametri delle tubazioni.

Il costo totale attualizzato, risulta quindi:  $C_{ta} = C_{ta}(R)$ , da cui l'equazione di ottimizzazione economica:  $dC_{ta}(R)/dR = 0$ , fornisce il valore delle perdite  $R$  di minimo onere globale.

## § I°.6.8 – TEMPERATURE DI PARETE. LIMITAZIONI TERMICHE.

Le temperature delle pareti interposte fra fluidi a diversa temperatura, risultano intermedie fra queste in funzione delle resistenze termiche parziali.

Per qualunque geometria, indicando con:  $T_c$ ,  $T_f$ ,  $T_p$ , le temperature del fluido più caldo, più freddo e della parete interposta e con  $R_{tc}$ ,  $R_{tf}$ ,

$R_{tm}$ , le corrispondenti resistenze termiche alla convezione, (fluido caldo-parete, parete-fluido freddo), e alla conduzione nella parete, posta la temperatura di parete da considerare sul lato caldo, si ha:

$$Q = \frac{T_c - T_p}{R_{tc}} = \frac{T_p - T_f}{R_{tm} + R_{tf}}, \text{ da cui: } \frac{T_c - T_p}{T_p - T_f} = \frac{R_{tc}}{R_{tm} + R_{tf}};$$

$$T_p = \frac{T_c(R_{tm} + R_{tf}) + T_f R_{tc}}{R_{tc} + R_{tm} + R_{tf}} = \frac{T_c \left( \frac{R_{tm}}{R_{tc}} + \frac{R_{tf}}{R_{tc}} \right) + T_f}{1 + \frac{R_{tm}}{R_{tc}} + \frac{R_{tf}}{R_{tc}}},$$

ovvero salti termici parziali inversamente proporzionali alle rispettive resistenze termiche, (nel caso la temperatura di parete sia sul lato freddo nell'espressione risultano invertite le temperature dei fluidi).

Poichè nella comune ipotesi in cui la resistenza della parete sia trascurabile rispetto a quella dei fluidi, ( $R_{tm} \ll R_{tc}$ ), risulta:

$$\lim_{\frac{R_{tf}}{R_{tc}} \rightarrow 0} T_p = \frac{T_c \frac{R_{tm}}{R_{tc}} + T_f}{1 + \frac{R_{tm}}{R_{tc}}} \approx T_f; \quad \lim_{\frac{R_{tf}}{R_{tc}} \rightarrow \infty} T_p \approx T_c,$$

bilanciando le resistenze termiche dei fluidi, (con opportune alettature e/o prevedendo circolazione forzata), è possibile avvicinare i valori della temperatura di parete a quella di uno dei due fluidi allontanandola da limiti potenzialmente non sopportabili dai materiali, (in tali casi è generalmente impossibile intervenire con isolamenti in quanto i limiti per le pareti lo sono viepiù per i materiali costituenti gli isolanti).

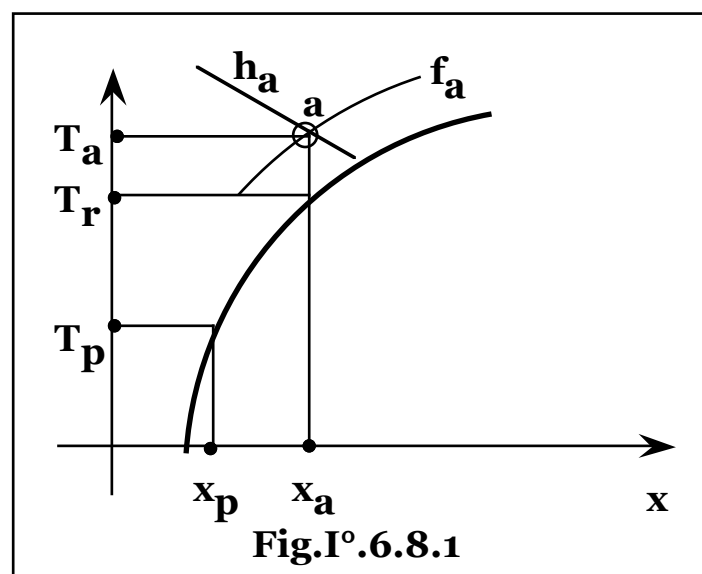
Qualora invece siano imposti limiti, (inferiori o superiori), per le temperature dei fluidi a evitare fenomeni di saturazione con liberazione di condensa, (aeriformi), o di vapore, (liquidi), o fenomeni di stillicidio dell'aria sulle superficie delle strutture, (potenzialmente dannose per le pareti stesse e/o per le apparecchiature successive), conseguono limitazioni termiche per le pareti a contatto con i fluidi stessi, ovvero tenuto conto del valore costante della resistenza termica della parete nuda, valori imposti di isolamento.

E' quindi necessario determinare l'andamento delle temperature di parete, ( $T_p$ ), in funzione delle temperature dei fluidi e del grado di isolamento.

### **Stillicidio.**



Se aria umida incontra una superficie a temperatura  $T_p$  inferiore al limite di rugiada  $T_r$ , (**Fig.I°.6.8.1**), corrispondente al suo stato fisico, (**a**), sulla parete si ha formazione di una quantità di condensa pari a  $(x_a - x_p)$ , per unità di massa di aria secca, con possibili infiltrazioni sempre dannose per le strutture specie in caso di solidificazione dell'acqua con aumento di volume, mentre per gli isolanti si ha anche una conseguente diminuzione delle capacità resistive. L'isolamento limite che impedisce il fenomeno dello stillicidio, risulta pertanto, quello che porta la temperatura di parete a temperatura  $T_r$ .



### Geometria piana.

Fra due regioni a temperatura  $T_a$  e  $T_b$ , separate da una parete di spessore  $s_m$  e conducibilità termica  $c_{tm}$ , isolata con uno spessore  $s$  di isolante di conducibilità termica  $c_{ti}$ , (**Fig.I°.6.8.2**), qualora l'isolante sia posto sulla superficie a contatto col fluido a temperatura  $T_a$ , la potenza termica trasmessa per unità di superficie, (**Q**), vale:

$$Q = \frac{T_a - T_b}{\frac{1}{c_{sa}} + \frac{s}{c_{ti}} + \frac{s_m}{c_{tm}} + \frac{1}{c_{sb}}} = \frac{T_p - T_b}{\frac{s}{c_{ti}} + \frac{s_m}{c_{tm}} + \frac{1}{c_{sb}}} = \frac{T_a - T_p}{\frac{1}{c_{sa}}},$$

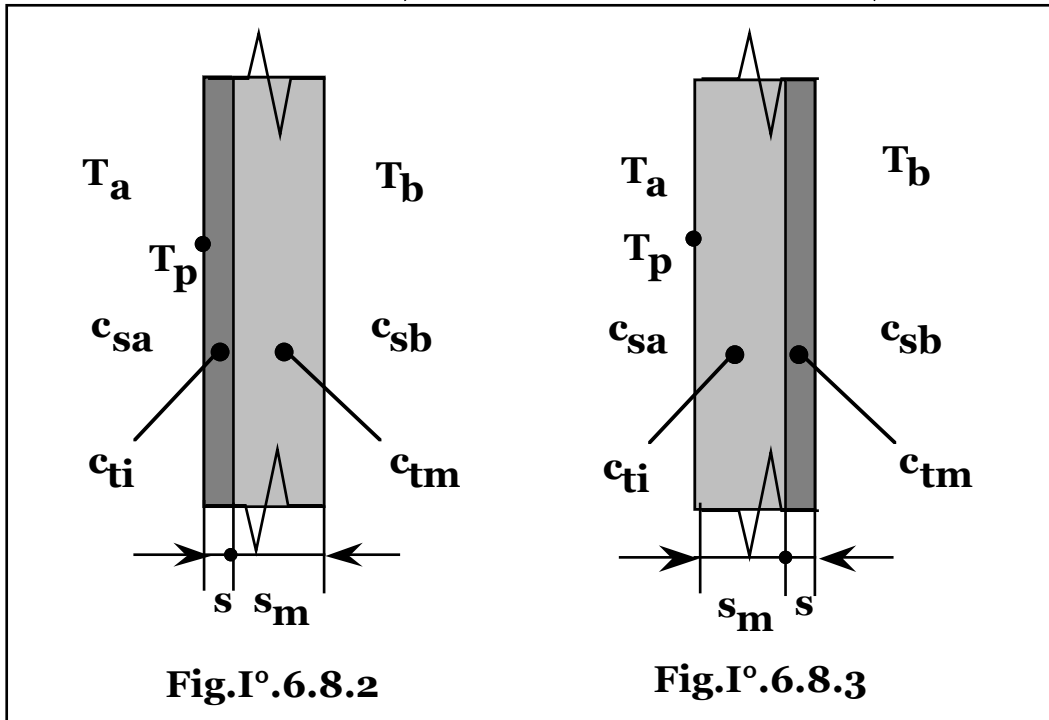
con  $c_{sa}$ ,  $c_{sb}$ , coefficienti di convezione ai due lati della parete.

Dall'ultima uguaglianza si ottiene:

$$T_p = \frac{T_a \left( \frac{1}{c_{sb}} + \frac{s_m}{c_{tm}} + \frac{s}{c_{ti}} \right) + \frac{T_b}{c_{sa}}}{\frac{1}{c_{sb}} + \frac{s_m}{c_{tm}} + \frac{s}{c_{ti}} + \frac{1}{c_{sa}}},$$

ovvero:

$$s(T_p) = c_{ti} \left( \frac{1}{c_{sa}} \frac{T_p - T_b}{T_a - T_p} - \frac{s_m}{c_{tm}} - \frac{1}{c_{sb}} \right).$$



Indicando con  $T_1$  la temperatura limite di parete, (di saturazione o di stillicidio), lo spessore di isolante termico che porta la temperatura di parete al valore limite  $T_1$ , vale pertanto:

$$s(T_1) = c_{ti} \left( \frac{1}{c_{sa}} \frac{T_1 - T_b}{T_a - T_1} - \frac{s_m}{c_{tm}} - \frac{1}{c_{sb}} \right).$$

Per:  $s(T_1) = 0$ , si ottiene:  $\frac{\frac{s_m}{c_{tm}} + \frac{1}{c_{sb}}}{\frac{1}{c_{sa}}} = \frac{T_1 - T_b}{T_a - T_1}$ , che coincide con la

relazione di bilancio fra il rapporto delle resistenze termiche parziali e i corrispondenti salti termici della parete nuda, ovvero:

$$T_p = \frac{T_a c_{sa} \left( \frac{s_m}{c_{tm}} + \frac{1}{c_{sb}} \right) + T_b}{c_{sa} \left( \frac{s_m}{c_{tm}} + \frac{1}{c_{sb}} \right) + 1} = T_1,$$

per cui non è richiesto isolamento per limitare la temperatura di parete. La temperatura limite  $T_1$  di stillicidio risulta dipendente dalle condizioni dell'aria e al limite di umidità relativa unitaria, ( $T_a = T_1$ ), qualunque raffreddamento della parete comporta liberazione di condensa, per cui lo spessore di isolamento tende a valori illimitati.

Parimenti in caso di fluidi saturi qualunque raffreddamento in caso di vapore saturo, o riscaldamento in caso di liquido saturo porta alla liberazione di condensa o vapore con spessore di isolamento che tende a infinito.

Qualora l'isolante sia posto sulla superficie a contatto con il fluido a temperatura  $T_b$ , (**Fig.I°.6.8.3**), e quindi la temperatura di parete da considerare sia quella della struttura, le resistenze termiche in serie risultano le stesse e parimenti quindi i salti termici, per cui si ottengono i medesimi risultati.

### Geometria cilindrica.

In geometria cilindrica con temperatura di parete limite all'esterno della condotta, (**Fig.I°.6.8.4**), per unità di lunghezza di corpo cilindrico, si

ha:

$$Q = \frac{T_a - T_b}{\frac{1}{2\pi c_{sa} r} + \frac{\ln \frac{r}{r_e}}{2\pi c_{ti}} + \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2\pi c_{tm}} + \frac{1}{2\pi c_{sb} r_i}} =$$

$$= \frac{T_p - T_b}{\frac{\ln \frac{r}{r_e}}{2\pi c_{ti}} + \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2\pi c_{tm}} + \frac{1}{2\pi c_{sb} r_i}} = \frac{T_a - T_p}{\frac{1}{2\pi c_{sa} r}},$$

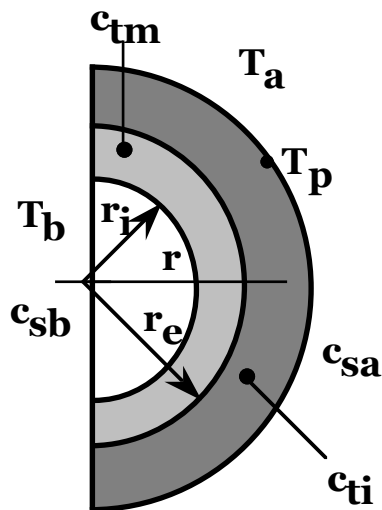
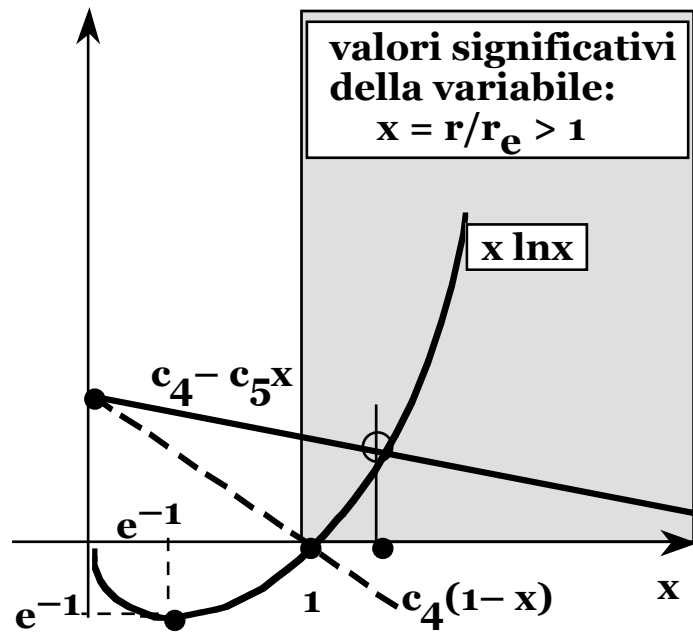


Fig. I° 6.8.4



valori significativi  
della variabile:  
 $x = r/r_e > 1$

Fig. I° 6.8.5

ovvero:

$$\frac{T_p - T_b}{T_a - T_p} = c_{sa} r \left( \frac{\ln \frac{r}{r_e}}{c_{ti}} + \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{c_{tm}} + \frac{1}{c_{sb} r_i} \right),$$

$$T_a \left( \frac{\ln \frac{r}{r_e}}{c_{ti}} + \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{c_{tm}} + \frac{1}{c_{sb} r_i} \right) + \frac{T_b}{c_{sa} r}$$

e quindi:  $T_p = \frac{\frac{1}{c_{sa} r} + \frac{\ln \frac{r}{r_e}}{c_{ti}} + \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{c_{tm}} + \frac{1}{c_{sb} r_i}}{\frac{1}{c_{sa} r} + \frac{\ln \frac{r}{r_e}}{c_{ti}} + \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{c_{tm}} + \frac{1}{c_{sb} r_i}},$

mentre l'equazione risolvete per il calcolo del raggio, ( $r$ ), di isolamento limite, (per:  $T_p = T_l$ ), da cui lo spessore dell'isolante:  $s = r - r_e$ , risulta:

$$\frac{T_l - T_b}{T_a - T_l} = c_{sa} r \left[ \frac{\ln \frac{r}{r_e}}{c_{ti}} + \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{c_{tm}} + \frac{1}{c_{sb} r_i} \right],$$

ovvero:

$$\frac{r}{r_e} \ln \frac{r}{r_e} = \frac{c_{ti}}{c_{sa} r_e} \frac{T_l - T_b}{T_a - T_l} - \frac{r}{r_e} c_{ti} \left( \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{c_{tm}} + \frac{1}{c_{sb} r_i} \right).$$

Posto:  $\mathbf{x} = \mathbf{r}/\mathbf{r_e}$ , si ottiene l'equazione adimensionale:  $\mathbf{x} \ln \mathbf{x} = \mathbf{c_4} - \mathbf{c_5} \mathbf{x}$ , che risolta graficamente, (**Fig.I°.6.8.5**), mostra una sola soluzione significativa, ( $\mathbf{x} = \mathbf{r}/\mathbf{r_e} > 1$ ), per valori del modulo della pendenza della retta superiore a quella della retta limite che si annulla per:

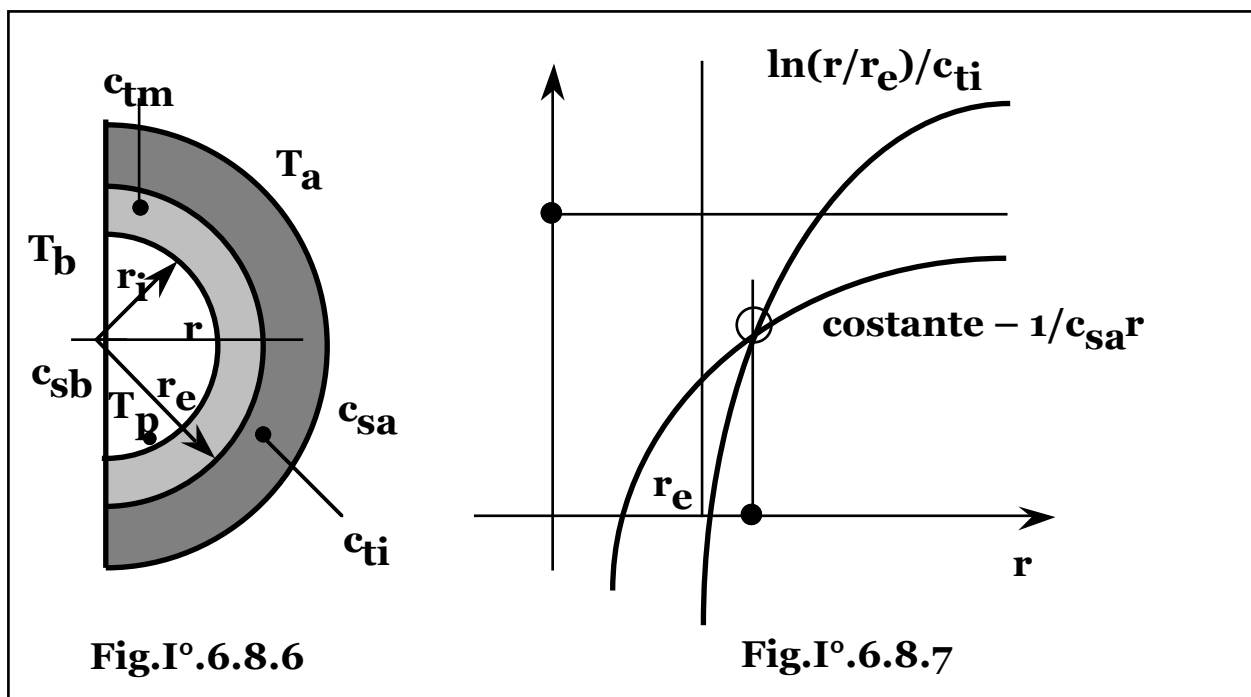
$\mathbf{x} = 1$ , ( $\mathbf{c_4} = \mathbf{c_5}$ ), ovvero:  $\frac{1}{\mathbf{c_{sa}r_e}} \frac{\mathbf{T_l} - \mathbf{T_b}}{\mathbf{T_a} - \mathbf{T_l}} = \frac{\ln \frac{\mathbf{r_e}}{\mathbf{r_i}}}{\mathbf{c_{tm}}} + \frac{1}{\mathbf{c_{sb}r_i}}$ , che coincide con la relazione di equilibrio fra il rapporto delle resistenze termiche parziali e i corrispondenti salti termici della parete nuda:

$$\frac{\frac{\ln \frac{\mathbf{r_e}}{\mathbf{r_i}}}{2\pi\mathbf{c_{tm}}} + \frac{1}{2\pi\mathbf{c_{sb}r_i}}}{\frac{1}{2\pi\mathbf{c_{sa}r_e}}} = \frac{\mathbf{T_p} - \mathbf{T_b}}{\mathbf{T_a} - \mathbf{T_p}},$$

$$\mathbf{T_p} = \frac{\mathbf{T_a c_{sa} r_e \left( \frac{\ln \frac{\mathbf{r_e}}{\mathbf{r_i}}}{\mathbf{c_{tm}}} + \frac{1}{\mathbf{c_{sb}r_i}} \right) + \mathbf{T_b}}}{\mathbf{c_{sa} r_e \left( \frac{\ln \frac{\mathbf{r_e}}{\mathbf{r_i}}}{\mathbf{c_{tm}}} + \frac{1}{\mathbf{c_{sb}r_i}} \right) + 1}} = \mathbf{T_l}$$

ovvero:

per cui non è richiesto isolamento per evitare superamenti dei limiti.



Qualora la temperatura di parete limite sia quella all'interno della condotta, (**Fig.I° 6.8.6**), si ha:

$$Q = \frac{T_a - T_p}{\frac{1}{2\pi c_{sa}r} + \frac{\ln \frac{r}{r_e}}{2\pi c_{ti}} + \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2\pi c_{tm}}} = \frac{T_p - T_b}{\frac{1}{2\pi c_{si}r_i}}$$

da cui:

$$\frac{\ln \frac{r}{r_e}}{c_{ti}} + \frac{1}{c_{sa}r} = \frac{1}{c_{sb}r_i} \frac{T_a - T_p}{T_p - T_b} - \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{c_{tm}},$$

e quindi:

$$T_p = \frac{\frac{T_a}{c_{sb}r_i} + T_b \left( \frac{1}{c_{sa}r} + \frac{\ln \frac{r}{r_e}}{c_{ti}} + \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{c_{tm}} \right)}{\frac{1}{c_{sa}r} + \frac{\ln \frac{r}{r_e}}{c_{ti}} + \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{c_{tm}} + \frac{1}{c_{sb}r_i}},$$

mentre l'equazione risolvente per il calcolo dello spessore di isolante

limite, (per:  $T_p = T_l$ ), risulta:  $\frac{\ln \frac{r}{r_e}}{c_{ti}} + \frac{1}{c_{sa}r} = \frac{1}{c_{sb}r_i} \frac{T_a - T_l}{T_l - T_b} - \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{c_{tm}}.$

La costante a secondo membro è comunque positiva essendo:

$$\frac{1}{2\pi c_{sb} r_i} \frac{T_a - T_p}{T_p - T_b} - \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2\pi c_{tm}} = \frac{1}{2\pi c_{sa} r} + \frac{\ln \frac{r}{r_e}}{2\pi c_{ti}},$$

e al limite di assenza di isolamento:

$$\frac{1}{2\pi c_{sb} r_i} \frac{T_a - T_p}{T_p - T_b} - \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2\pi c_{tm}} = \frac{1}{2\pi c_{sa} r_e},$$

per cui risolvendo graficamente l'equazione, (**Fig.I°.6.8.7**), si ha una e una sola soluzione significativa, ( $r > r_e$ ), con condizione limite, ( $r = r_e$ ),

che corrisponde a:  $\frac{T_a - T_1}{\frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2\pi c_{tm}} + \frac{1}{2\pi c_{sa} r_e}} = \frac{T_1 - T_b}{1}$ , ovvero temperatura

di parete interna in assenza di isolamento, pari a  $T_1$ .

## § I°.6.9 – DIMENSIONAMENTO ECONOMICO DELL'ISOLAMENTO TERMICO.

### Geometria piana.

Attraverso una superficie piana unitaria che separa due ambienti fra i quali si ha un salto di temperatura  $DT$ , la potenza termica trasmessa, vale:  $DT/R_t$ , (ovvero affinché si mantenga un salto di temperatura  $DT$  è necessario cedere la potenza termica  $DT/R_t$ ), pertanto, detto  $u$  il coefficiente di utilizzazione degli impianti termici o frigoriferi, l'energia termica, ( $Q_a$ ), trasmessa a periodo di tempo di riferimento, ( $T$ ), vale:

$$Q_a = uT DT/R_t.$$

In caso di un impianto di riscaldamento, il costo specifico dell'energia termica, ( $c_q$ ), limitando l'analisi del costo ai soli oneri di esercizio, vale:

$$c_q = c_c/(k_i h_g),$$

con:  $c_c$  costo specifico del combustibile impiegato;  
 $k_i$  potere calorifico del combustibile impiegato;  
 $h_g$  rendimento del generatore di calore.

In caso di un impianto frigorifero, si ha:  $c_q = c_k/COP$ , con:

$c_k$  costo specifico dell'energia elettrica;  
**COP** coefficiente di effetto frigorifero.

Indicando con **s** lo spessore dell'isolante, il costo di installazione per unità di superficie, **I(s)**, può esprimersi come: **I(s) = c<sub>o</sub> + c<sub>i</sub> s**,

con: **c<sub>o</sub>** costo fisso di installazione a unità di superficie;

**c<sub>i</sub>** costo a unità di volume dell'isolante.

La resistenza termica totale della parete vale: **R<sub>t</sub> = R<sub>o</sub> + s/c<sub>ti</sub>**, con:

$$R_o = \frac{1}{c_{si}} + \sum_{i=1}^n \frac{s_{mi}}{c_{tmi}} + \frac{1}{c_{se}},$$

resistenza termica della parete non isolata, **c<sub>ti</sub>** conducibilità termica dell'isolante e **c<sub>tmi</sub>**, **s<sub>mi</sub>** conducibilità termica e spessore dell'**i**esimo strato resistivo della parete.

Il costo totale attualizzato del sistema impianto di riscaldamento/frigorifero più isolamento termico, (**C<sub>ta</sub>**), risulta quindi:

$$\begin{aligned} C_{ta}(s) &= Q_a \frac{c_q}{t_{eq}} + I(s) = \frac{uTDT}{R_t} \frac{c_q}{t_{eq}} + c_o + c_i s = \\ &= \frac{uTDT}{R_o + \frac{s}{c_{ti}}} \frac{c_q}{t_{eq}} + c_o + c_i s. \end{aligned}$$

La funzione: **C<sub>ta</sub> = C<sub>ta</sub>(s)**, proveniente da infinito, (positivo), per: **s = - c<sub>ti</sub>R<sub>o</sub>**, spostandosi verso il campo dei valori aventi significato fisico, (**s > 0**), incontra l'asse delle ordinate, (**s = 0**), nel punto: **DTc<sub>q</sub>uT/(R<sub>o</sub>t<sub>eq</sub>) + c<sub>o</sub>**, quindi per **s** che tende all'infinito tende alla retta asintotica: **c<sub>o</sub> + c<sub>i</sub>s**.

Essendo le radici dell'equazione di ottimizzazione: **dC<sub>ta</sub>(s)/ds = 0**:

$$s = \pm \sqrt{DTc_{ti}c_q \frac{uT}{c_i t_{eq}}} - c_{ti}R_o,$$

e nel campo di interesse la concavità della curva sempre positiva, (**d<sup>2</sup>C<sub>ta</sub>(s)/ds<sup>2</sup> > 0**, **∀ s > - c<sub>ti</sub>R<sub>o</sub>**), l'unico estremante che corrisponde al solo valore della variabile eventualmente positivo:

$$s = \sqrt{DTc_{ti}c_q \frac{uT}{c_i t_{eq}}} - c_{ti}R_o, \text{ corrisponde a un minimo della funzione}$$

e risulta quindi la condizione di isolamento economico, (**s = s<sub>ec</sub>**).

Il costo **c<sub>o</sub>** non appare nella relazione, risultando analiticamente una costante in un processo di derivazione e in sostanza essendo l'ipotesi di installare comunque un isolante di un qualche spessore e di dovere, quindi, in ogni caso sostenere l'onere **c<sub>o</sub>**.



Il valore della resistenza  $R_o$  limite di convenienza economica all'isolamento, ( $R_o^*$ ), si ottiene ponendo:  $s_{ec} = 0$  e risulta:

$$R_o^* = \sqrt{\frac{DTc_q uT}{c_{ti}c_{ti}t_{eq}}}.$$

Generalmente la geometria piana si riferisce a impianti termici o frigoriferi in cui la potenza installata dipende dall'entità dell'isolamento, pertanto anche il costo di investimento dell'impianto risulta variabile in funzione dell'isolamento.

Nel caso in cui la potenza installata dell'impianto, ( $Q$ ), sia pari, (o proporzionale), alla potenza termica trasmessa da o verso l'esterno, si ha:  $Q = DT S/R_t$ , con  $S$  e  $R_t$  superficie totale di trasmissione e

resistenza termica totale equivalenti del sistema:  $\frac{S}{R_t} = \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{R_{ti}}$ , con  $S_i$

iesima superficie di trasmissione di resistenza termica globale  $R_{ti}$ .

Indicando con  $q$  il costo a unità di potenza dell'impianto, il relativo onere di installazione per unità di superficie di trasmissione, vale:

$$q \frac{Q}{S} = q \frac{DT}{R_t}.$$

Il costo specifico totale di impianto, (comprensivo dell'isolamento), risulta dunque:  $I(s) = c_o + c_i s + q \frac{DT}{R_o + \frac{s}{c_{ti}}}$ .

Il costo totale attualizzato del sistema, ( $C_{ta}$ ), risulta quindi:

$$C_{ta}(s) = \frac{uTDT}{R_o + \frac{s}{c_{ti}}} \frac{c_q}{t_{eq}} + c_o + c_i s + \frac{qDT}{R_o + \frac{s}{c_{ti}}}.$$

Posto:  $dC_{ta}(s)/ds = 0$ , si ottiene lo spessore economico dell'isolante

termico, ( $s_{ec}$ ), pari a:  $s_{ec} = \sqrt{\frac{DTc_{ti}}{c_i} \left( q + \frac{uTc_q}{t_{eq}} \right)} - c_{ti}R_o$ , per il quale

occorre la medesima verifica di positività.

Il valore della resistenza  $R_o$  limite di convenienza economica all'isolamento, ( $R_o^*$ ), si ottiene ponendo:  $s_{ec} = 0$  e risulta:

$$R_o^* = \sqrt{\frac{DT}{c_i c_{ti}} \left( q + \frac{uTc_q}{t_{eq}} \right)}.$$

Per considerare anche eventuali oneri gestionali, (proporzionali al costo di installazione), è sufficiente inserire a fattore del costo **q** il termine: **(1 + a/t<sub>em</sub>)**.

Per gli impianti di riscaldamento civili o industriali la potenza installata risulta pari a: **Q = f<sub>a</sub>SDT/R<sub>t</sub>**, con **f<sub>a</sub>** coefficiente correttivo di sicurezza, (**f<sub>a</sub> > 1**), per attenuazione, intermittenza avviamento ed esposizione, mentre l'energia termica dispersa a periodo, (annuo), di valutazione vale: **Q<sub>a</sub> = f<sub>g</sub>SGG/R<sub>t</sub>**, con **GG** numero di gradi-giorno della zona.

Il costo totale attualizzato in funzione dello spessore dell'isolante termico del sistema, vale quindi:

$$C_{ta}(s) = \frac{qf_aSDT}{R_t(s)} + c_o + c_i s + \frac{f_gSGGc_q}{t_{eq}R_t(s)},$$

e quindi lo spessore economico dell'isolante termico, (**s<sub>ec</sub>**), si ottiene come radice dell'equazione:

$$\frac{dC_{ta}(s)}{ds} = c_i - \frac{\left( qf_aDT + \frac{f_gGGc_q}{t_{eq}} \right)}{R_t^2(s)} \frac{dR_t(s)}{ds} = 0,$$

da cui: 
$$s_{ec} = \sqrt{\left( qf_aDT + \frac{f_gGGc_q}{t_{eq}} \right) \frac{c_{ti}}{c_i} - c_{ti}R_o}.$$

L'intervento di isolamento termico, può essere valutato anche come ottenimento di un utile, (risparmio di energia dissipata), a fronte di un onere di investimento, (opere di isolamento).

In tal caso si ha: 
$$VAN(s) = \frac{uTDTc_q}{t_{eq}} \left( \frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_o + \frac{s}{c_{ti}}} \right) + c_o + c_i s =$$

$$= \frac{uTDTc_q}{t_{eq}R_o} - \frac{uTDT}{\left( R_o + \frac{s}{c_{ti}} \right)} \frac{c_q}{t_{eq}} - (c_o + c_i s) = \frac{uTDTc_q}{t_{eq}R_o} - C_{ta}(s).$$

Differendo quindi le funzioni **VAN** e **C<sub>ta</sub>**, solo per una costante, le condizioni di ottimizzazione coincidono.

Risulta, inoltre:  $\frac{dVAN(s)}{ds} = -\frac{dC_{ta}(s)}{ds}$ , in quanto la prima condizione corrisponde a un massimo della funzione e la seconda a un minimo.

## Geometria cilindrica.

In geometria cilindrica l'energia termica trasmessa per unità di lunghezza di corpo cilindrico a periodo di riferimento, (o che è necessario cedere affinché si mantenga un salto di temperatura **DT**), risulta:  $Q_a = uT DT/R_t(r)$ , con:

$$R_t(r) = \frac{1}{2\pi c_{se}r} + \frac{\ln \frac{r}{r_e}}{2\pi c_{ti}} + \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2\pi c_{tm}} + \frac{1}{2\pi c_{si}r_i},$$

mentre il costo di installazione dell'isolamento per unità di lunghezza di corpo cilindrico, vale:  $I(r) = c_o + c_i \pi (r^2 - r_e^2)$ .

Il costo totale attualizzato del sistema, ( $C_{ta}$ ), vale, quindi:

$$C_{ta}(r) = \frac{uT DT}{R_t(r)} \frac{c_q}{t_{eq}} + c_o + c_i \pi (r^2 - r_e^2).$$

L'equazione di ottimizzazione economica, [ $dC_{ta}(r)/dr = 0$ ], per il calcolo della radice  $r_{ec}$ , e quindi dello spessore economico di isolante:

$s_{ec} = r_{ec} - r_e$ , risulta quindi:

$$\begin{aligned} \frac{dC_{ta}(r)}{dr} &= - \frac{uT DT c_q}{t_{eq} R_t^2(r)} \frac{dR_t(r)}{dr} + 2\pi c_i r = \\ &= - \frac{uT DT c_q}{t_{eq} R_t^2(r)} \left( \frac{1}{2\pi c_{ti} r} - \frac{1}{2\pi c_{se} r^2} \right) + 2\pi c_i r = 0, \end{aligned}$$

ovvero: 
$$\frac{r^3 R_t^2(r)}{c_{se} r - c_{ti}} = \frac{uT DT c_q}{4\pi^2 t_{eq} c_i c_{ti} c_{se}},$$

delle cui soluzioni occorre verificare il senso fisico, ( $r_{ec} > r_e$ ), e che risulti:  $C_{ta}(r_{ec}) < C_{ta}(r_e) = DT c_q uT / (R_o t_{eq})$ , altrimenti non conviene, (economicamente), isolare la tubazione.

Il valore della resistenza termica del corpo cilindrico non isolato:

$$R_o = \frac{1}{2\pi c_{se} r_e} + \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2\pi c_{tm}} + \frac{1}{2\pi c_{si} r_i},$$
 limite di convenienza economica all'isolamento, ( $R_o^*$ ), si ottiene imponendo che per tale valore della

variabile, ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e$ ,  $\mathbf{s}_{ec} = \mathbf{0}$ ), l'equazione di ottimizzazione economica sia

verificata, ovvero: 
$$\frac{\mathbf{r}_e^3 \mathbf{R}_t^2(\mathbf{r}_e)}{\mathbf{c}_{se} \mathbf{r}_e - \mathbf{c}_{ti}} = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{D} \mathbf{T} \mathbf{c}_q}{4\pi^2 \mathbf{t}_{eq} \mathbf{c}_i \mathbf{c}_{ti} \mathbf{c}_{se}},$$

da cui: 
$$\mathbf{R}_0^* = \sqrt{\frac{(\mathbf{c}_{se} \mathbf{r}_e - \mathbf{c}_{ti}) \mathbf{D} \mathbf{T} \mathbf{u}^T \mathbf{c}_q}{4\pi^2 \mathbf{r}_e^3 \mathbf{c}_i \mathbf{c}_{se} \mathbf{c}_{ti} \mathbf{t}_{eq}}}.$$

Per  $\mathbf{r}_e \leq \mathbf{c}_{ti}/\mathbf{c}_{se}$ , (raggio critico),  $\mathbf{R}_0^*$  risulta nulla o immaginaria in quanto non conviene mai isolare.

Qualora sia lecito trascurare la resistenza della parete nuda rispetto a quella dell'isolante, (eventualmente maggiorata di un fattore correttivo

$\mathbf{k}_n > 1$ ), ovvero porre:  $\mathbf{R}_t(\mathbf{r}) = \mathbf{k}_n \frac{\ln \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_e}}{2\pi \mathbf{c}_{ti}}$ , le relazioni risultano:

$$\mathbf{C}_{ta}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{D} \mathbf{T} \mathbf{c}_q}{\mathbf{t}_{eq} \mathbf{k}_n} \frac{2\pi \mathbf{c}_{ti}}{\ln \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_e}} + \mathbf{c}_o + \mathbf{c}_i \pi (\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}_e^2);$$

$$\frac{d\mathbf{C}_{ta}(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}} = - \frac{2\pi \mathbf{c}_{ti} \mathbf{u}^T \mathbf{D} \mathbf{T} \mathbf{c}_q}{\mathbf{t}_{eq} \mathbf{k}_n} \frac{1}{\mathbf{r} \ln^2 \left( \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_e} \right)} + 2\mathbf{c}_i \pi \mathbf{r},$$

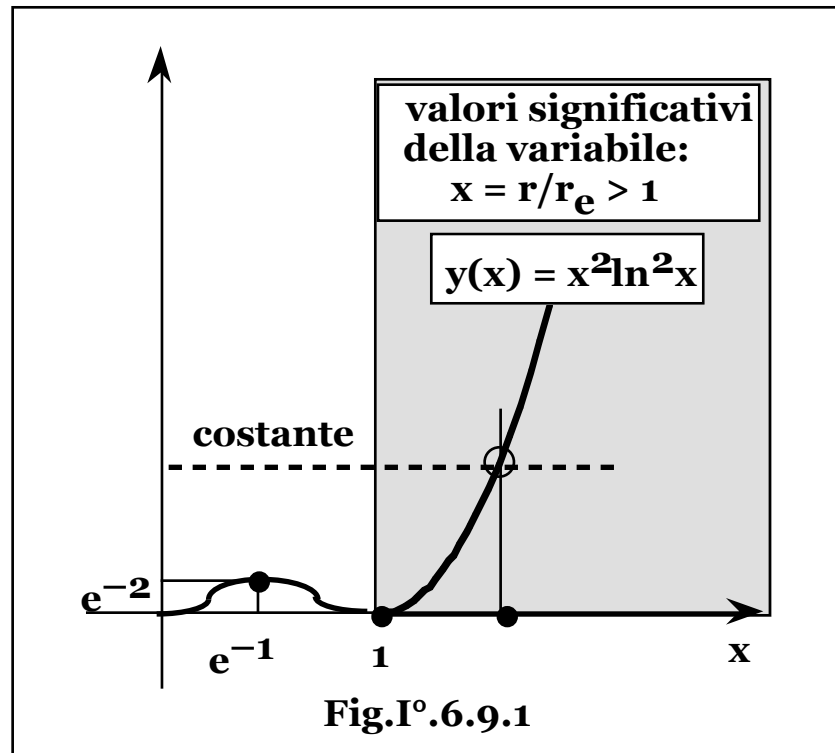
che posta uguale a zero risulta:  $\left( \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_e} \right)^2 \ln^2 \left( \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_e} \right) = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{D} \mathbf{T} \mathbf{c}_q \mathbf{c}_{ti}}{\mathbf{k}_n \mathbf{t}_{eq} \mathbf{c}_i \mathbf{r}_e^2}$ , ovvero

un'equazione adimensionale del tipo:  $\mathbf{x}^2 \ln^2 \mathbf{x} = \text{costante}$ , (**Fig.I°6.9.1**), che ammette una e una sola soluzione significativa, ( $\mathbf{x}_{ec} = \mathbf{r}_{ec}/\mathbf{r}_e > 1$ ), in ogni caso in quanto in assenza di isolamento, l'ipotesi di trascurare la resistenza termica della parete nuda, comporta un costo totale attualizzato illimitato.

Determinato il valore dello spessore economico dell'isolamento termico, è possibile verificare la correttezza del valore assegnato al coefficiente:

$$k_n = \frac{R_o + \frac{\ln \frac{r_{ec}}{r_e}}{2\pi c t_i}}{\frac{\ln \frac{r_{ec}}{r_e}}{2\pi c t_i}} = 1 + \frac{2\pi c t_i R_o}{\ln \frac{r_{ec}}{r_e}}, \text{ e ripetere il calcolo in maniera}$$

iterativa fino alla convergenza del procedimento.



Generalmente la geometria cilindrica si riferisce a condotte di convogliamento di fluidi con dispersioni termiche comunque ridotte rispetto a quelle relative agli ambienti riscaldati, (o refrigerati), e agli altri contributi di scambio termico, per cui la potenza installata non risente sensibilmente dell'entità di tale isolamento e di conseguenza il relativo costo di impianto non compare nelle valutazioni di ottimizzazione economica.

A ottimizzazione effettuata, occorre verificare che lo spessore economico dell'isolante sia in grado di evitare fenomeni di saturazione del fluido, o di stillicidio dell'aria: in caso contrario la scelta di isolamento risulta il suddetto limite tecnico.

L'intervento di isolamento termico, può essere valutato anche come l'ottenimento di un utile, (risparmio di energia dissipata), a fronte un investimento, (opere di isolamento).

In tal caso si ha:

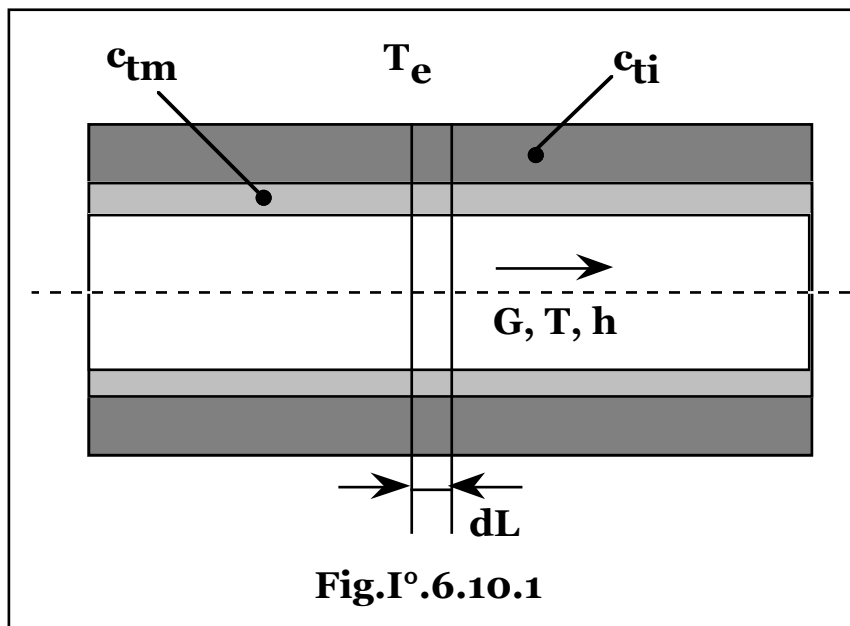
$$\begin{aligned} VAN(r) &= \frac{uTD\tau c_q}{t_{eq}} \left( \frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_t(r)} \right) - \left( c_o + c_i \pi (r^2 - r_e^2) \right) = \\ &= \frac{uTD\tau c_q}{t_{eq} R_o} - \frac{uTD\tau c_q}{t_{eq} R_t(r)} - \left( c_o + c_i \pi (r^2 - r_e^2) \right) = \frac{uTD\tau c_q}{t_{eq} R_o} - C_{ta}(r). \end{aligned}$$

Differendo quindi le funzioni **VAN** e **C<sub>ta</sub>**, solo per una costante, le condizioni di ottimizzazione coincidono.

Risulta, inoltre:  $\frac{dVAN(r)}{dr} = - \frac{dC_{ta}(r)}{dr}$ , in quanto la prima condizione corrisponde a un massimo della funzione e la seconda a un minimo.

### § I°.6.10 – VARIAZIONI TERMICHE LUNGO LE TUBAZIONI.

In un tratto infinitesimo, (**dL**), di tubazione, (**Fig.I°.6.10.1**), percorsa da una portata di fluido **G** a temperatura diversa da quella dello spazio circostante, (**T<sub>e</sub>**), viene scambiata in regime stazionario, la potenza termica: **dQ** = ± (**T** - **T<sub>e</sub>**)**dL/R<sub>t</sub>**, con **T**, temperatura del fluido nella sezione **L** e **R<sub>t</sub>** resistenza termica per unità di lunghezza di condotta.



La stessa potenza termica per il fluido circolante risulta:  $dQ = \pm Gdh$ , che in caso di fluidi monofase può esprimersi come:  $dQ = \pm Gc_p dT$ .

In caso di **fluidi monofase**, si ha quindi:

$dQ = (T - T_e)dL/R_t = -Gc_p dT$ , da cui:  $T(L) = T_e + (T_o - T_e)e^{-\frac{L}{Gc_p R_t}}$ , con  $T_o$  temperatura del fluido nella sezione di riferimento, ( $L = 0$ ).

Pertanto fissate le condizioni iniziali, ( $T_o$ ), e ambientali, ( $T_e$ ), note o imposte tre delle quattro variabili, ( $G$ ,  $R_t$ ,  $T$ ,  $L$ ), che compaiono nella relazione, è possibile risalire alla rimanente, ovvero determinare, oltre all'andamento della temperatura con la distanza, la portata che in un certo tratto porta il fluido a una prefissata temperatura, la lunghezza di condotta che comporta una certa variazione termica di una data portata e le condizioni di isolamento, ( $R_t$ ), richieste per l'ottenimento di condizioni di lunghezza e portata imposte:

$$G = \frac{L}{R_t c_p \ln \frac{T_o - T_e}{T - T_e}}; \quad L = Gc_p R_t \ln \frac{T_o - T_e}{T - T_e}; \quad R_t = \frac{L}{Gc_p \ln \frac{T_o - T_e}{T - T_e}}.$$

Le grandezze:  $R_t$ ,  $G$ ,  $L$ , mantengono comunque significato fisico, (reali e positive), in quanto risultando la temperatura  $T$  sempre compresa fra quella iniziale, ( $T_o$ ), e quella esterna, ( $T_e$ ), le differenze:  $T_o - T_e$  e  $T - T_e$ , assumono in ogni caso lo stesso segno e risulta:  $T_o - T_e > T - T_e$ .

Indicando con  $T_s$  la temperatura di saturazione del fluido, qualora risulti:  $T_o > T_s > T_e$ , ovvero:  $T_o < T_s < T_e$ , le grandezze limite oltre le quali il fluido entra nel campo bifase, risultano:  
lunghezza massima, ( $L_{max}$ ), percorribile da un fluido monofase:

$$L_{max} = Gc_p R_t \ln \frac{T_o - T_e}{T_s - T_e};$$

portata minima, ( $G_{min}$ ), del fluido monofase:

$$G_{min} = \frac{L}{R_t c_p \ln \frac{T_o - T_e}{T_s - T_e}};$$

resistenza termica minima, ( $R_{tmin}$ ), della condotta:

$$R_{tmin} = \frac{L}{Gc_p \ln \frac{T_o - T_e}{T_s - T_e}}.$$

Infine la relazione di calcolo della temperatura iniziale richiesta, ( $T_o$ ), in funzione delle altre grandezze, risulta:

$$T_o = T_e + (T - T_e) e^{\frac{L}{G c_p R_t}}$$

In caso di **fluidi bifase**, si ha:  $T(L) = T_o = \text{costante}$ , da cui:

$$dQ = \frac{T_o - T_e}{R_t} dL = -G dh, \text{ e quindi: } h(L) = h_o - \frac{T_o - T_e}{G R_t} L;$$

$$R_t = \frac{T_o - T_e}{h_o - h} \frac{L}{G}; \quad G = \frac{T_o - T_e}{h_o - h} \frac{L}{R_t}; \quad L = G R_t \frac{h_o - h}{T_o - T_e}.$$

Indicando con  $r_v$  il calore di vaporizzazione, (o condensazione), le grandezze limite oltre le quali il fluido diviene monofase, risultano: lunghezza massima, ( $L_{\max}$ ), percorribile da un fluido bifase:

$$L_{\max} = \frac{G R_t r_v}{|T_o - T_e|};$$

portata minima, ( $G_{\min}$ ), del fluido bifase:

$$G_{\min} = \frac{|T_o - T_e|}{r_v} \frac{L}{R_t};$$

resistenza termica minima, ( $R_{t\min}$ ), della condotta:

$$R_{t\min} = \frac{|T_o - T_e|}{r_v} \frac{L}{G}.$$

Il valore dell'entalpia iniziale richiesta, ( $h_o$ ), in funzione delle altre grandezze, risulta:  $h_o = h + \frac{T_o - T_e}{G R_t} L$ .

### § I°.6.11 – EQUILIBRIO TERMICO E FLUIDODINAMICO DI FLUIDI SATURI.

Nelle condotte percorse da fluidi in prossimità della saturazione, le fughe o rientrate termiche attraverso le pareti, (in caso di fluidi a temperatura superiore o inferiore all'ambiente circostante, rispettivamente), alle quali si aggiunge il calore generato dalle perdite per attriti fluidodinamici all'interno dei fluidi in moto, provocano condensazione o vaporizzazione di parte dei fluidi stessi.

La presenza di miscele bifase aumenta le perdite di carico nelle tubazioni e l'ingresso negli utilizzatori di fluidi non in grado di cedere o acquistare tutto il calore latente di condensazione, (o vaporizzazione), come da condizioni di progetto, comporta la necessità di un



supplemento di portata con aumento degli oneri di impianto e di esercizio.

### § I°.6.12 – CONDOTTE PERCORSE DA VAPORE SATURO.

In caso di fluidi saturi a temperatura superiore a quella dell'ambiente circostante, i due fenomeni possono essere bilanciati con ottenimento di fluido ancora saturo in ingresso alle utenze.

In un tratto elementare, ( $dL$ ), di tubazione percorsa da fluido a temperatura di condensazione,  $T_c$ , in regime stazionario si ha trasmissione verso l'esterno della potenza termica:

$$dQ = (T_c - T_e)dL/R_t,$$

con  $T_e$  temperatura dell'ambiente circostante e:

$$R_t = \frac{1}{2\pi c_{se}r} + \frac{\ln \frac{r}{r_e}}{2\pi c_{ti}} + \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2\pi c_{tm}} + \frac{1}{2\pi c_{si}r_i} \approx k_s \frac{\ln \frac{D}{D_e}}{2\pi c_{ti}},$$

nell'ipotesi di considerare costante il coefficiente maggiorativo, ( $k_s$ ), della resistenza termica dovuta al solo isolante, equivalente alla resistenza globale della condotta.

Nello stesso tratto elementare di tubazione la potenza dissipata in calore per perdite fluidodinamiche, ( $dP$ ), vale:  $dP = \frac{8k_a(1+f_c)G^3}{d_{sv}^2\pi^2D_i^5} dL$ ,

con  $d_{sv}$  densità del fluido saturo.

Eguagliando le due espressioni, si ottiene la relazione di calcolo del diametro di isolante che bilancia le due potenze termiche mantenendo costante l'entalpia del fluido e quindi le condizioni di saturazione:

$$\frac{T_c - T_e}{R_t} dL = \frac{8k_a(1+f_c)G^3}{d_{sv}^2\pi^2D_i^5} dL,$$

da cui: 
$$\frac{R_t}{D_i^5} = \frac{(T_c - T_e)d_{sv}^2\pi^2}{8k_a(1+f_c)G^3},$$

ovvero: 
$$\ln \frac{D}{D_e} = k'_1 D_i^5 = k_1 D_e^5,$$

con: 
$$k'_1 = \frac{c_{ti}(T_c - T_e)d_{sv}^2\pi^2}{4k_s k_a(1+f_c)G^3}; \quad k_1 = \frac{c_{ti}(T_c - T_e)d_{sv}^2\pi^2}{4k_s k_a(1+f_c)G^3(1+2r_d)^5},$$

considerando:  $\frac{D_e}{D_i} = 1 + 2r_d \approx \text{costante}$ .

In condizioni di ottimizzazione economica per il diametro di isolante,

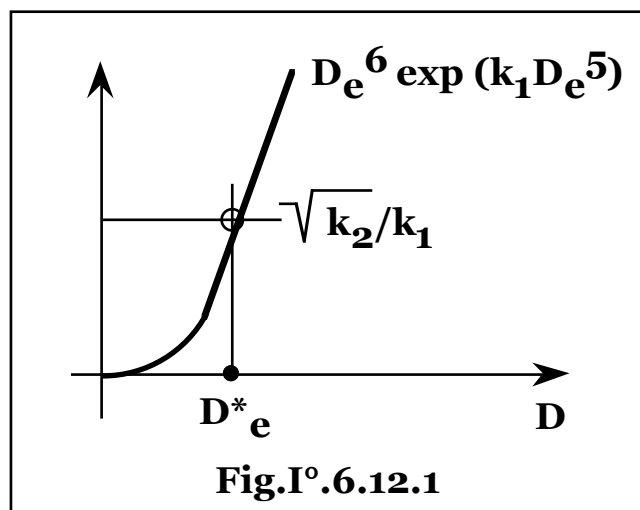
nell'ipotesi di porre:  $R_t \approx \frac{k_s \ln \frac{D}{D_e}}{2\pi c_{ti}}$ , vale la relazione:

$$D^2 \ln^2 \frac{D}{D_e} = \frac{4c_{ti}(T_c - T_e)uTc_q}{c_i k_s t_{eq}} = k_2.$$

Pertanto se il valore della velocità del fluido, (e quindi fissata la portata il diametro della condotta), non è imposto da ulteriori considerazioni impiantistiche o economiche, il sistema:

$$\begin{cases} \ln \frac{D}{D_e} = k_1 D_e^5 \\ D^2 \ln^2 \frac{D}{D_e} = k_2 \end{cases}, \quad \text{ovvero:} \quad \begin{cases} D_e^6 k_1 D_e^5 = \frac{\sqrt{k_2}}{k_1} \\ D = \frac{\sqrt{k_2}}{k_1} \frac{1}{D_e^5} \end{cases}.$$

La funzione  $D_e^6 \exp(k_1 D_e^5)$ , (Fig.I°.6.12.1), passa per l'origine e risulta monotona crescente per  $D_e \geq 0$ .



La radice, ( $D_e^*$ ), dell'equazione:  $D_e^6 k_1 D_e^5 = \frac{\sqrt{k_2}}{k_1}$ :  $D^* = \frac{\sqrt{k_2}}{k_1} \frac{1}{(D_e^*)^5}$ ,

ottenibile per via iterativa o graficamente, appare pertanto unica.

Qualora, invece, sia richiesto di fissare in maniera indipendente il diametro della tubazione per esigenze tecniche o economiche, se risulta:  $D_e > D^*$ , le perdite di carico non sono sufficienti a compensare le dispersioni termiche e pertanto è necessario un certo surriscaldamento a monte della tubazione, affinché il fluido risulti saturo secco nella sezione terminale.

Il fluido è, quindi, monofase e l'equazione di bilancio risulta, in tal caso:

$$\frac{T_c - T_e}{R_t} dL - \frac{8k_a(1 + f_c)G^3(1 + 2r_d)^5}{d_{sv}^2\pi^2 D_e^5} dL = -Gc_{pv}dT,$$

da cui: 
$$\frac{dT}{dL} + \frac{T}{Gc_{pv}R_t} = \frac{T_e}{Gc_{pv}R_t} + \frac{8k_a(1 + f_c)G^2(1 + 2r_d)^5}{d_{sv}^2\pi^2 D_e^5},$$

con  $c_{pv}$  calore specifico del vapore surriscaldato.

L'integrale generale dell'equazione, è pari all'integrale dell'omogenea

associata: 
$$\frac{dT}{dL} + \frac{T}{Gc_{pv}R_t} = 0, \text{ che vale: } T(L) = c_1 e^{-\frac{L}{Gc_{pv}R_t}},$$
 più un

integrale particolare che può ottenersi ponendo:  $T = \text{costante}$ , da cui:

$$T = T_e + \frac{8k_a(1 + f_c)G^3(1 + 2r_d)^5 R_t}{d_{sv}^2\pi^2 D_e^5}.$$

Si ottiene, pertanto:

$$T(L) = c_1 e^{-\frac{L}{Gc_{pv}R_t}} + T_e + \frac{8k_a(1 + f_c)G^3(1 + 2r_d)^5 R_t}{d_{sv}^2\pi^2 D_e^5}.$$

Imponendo le condizioni al contorno:  $T = T_o$ , per  $L = 0$ , si ricava:

$$c_1 = T_o - T_e - \frac{8k_a(1 + f_c)G^3(1 + 2r_d)^5 R_t}{d_{sv}^2\pi^2 D_e^5}, \text{ e quindi:}$$

$$T(L) = \left[ T_o - T_e - \frac{8k_a(1 + f_c)G^3(1 + 2r_d)^5 R_t}{d_{sv}^2\pi^2 D_e^5} \right] e^{-\frac{L}{Gc_{pv}R_t}} + T_e + \frac{8k_a(1 + f_c)G^3(1 + 2r_d)^5 R_t}{d_{sv}^2\pi^2 D_e^5}.$$

Ricavato il diametro economico dell'isolante dall'equazione:

$$D^2 \ln^2 \frac{D}{D_e} = \frac{4c_{ti}(T_c - T_e)uT_{c_q}}{c_i k_{st_{eq}}},$$

e calcolato, quindi, il valore della resistenza termica  $R_t$ , imponendo che nella sezione finale della tubazione, ( $L = L_f$ ), il fluido sia in condizioni di saturazione, ( $T = T_s$ ):

$$T_s = \left[ T_o - T_e - \frac{8k_a(1 + f_c)G^3(1 + 2r_d)^5 R_t}{d_{sv}^2 \pi^2 D_e^5} \right] e^{-\frac{L_f}{Gc_{pv}R_t}} + T_e + \frac{8k_a(1 + f_c)G^3(1 + 2r_d)^5 R_t}{d_{sv}^2 \pi^2 D_e^5},$$

si ottiene il grado di sottoraffreddamento, richiesto:

$$T_o = T_e + \frac{8k_a(1 + f_c)G^3(1 + 2r_d)^5 R_t}{d_{sv}^2 \pi^2 D_e^5} + \left[ T_s - T_e - \frac{8k_a(1 + f_c)G^3(1 + 2r_d)^5 R_t}{d_{sv}^2 \pi^2 D_e^5} \right] e^{\frac{L_f}{Gc_{pv}R_t}}.$$

Per:  $T_s < T_e + \frac{8k_a(1 + f_c)G^3(1 + 2r_d)^5 R_t}{d_{sv}^2 \pi^2 D_e^5}$ , si ottiene:  $T_o < T_s$ , che

corrisponde, (essendo per  $D_e = D^*$ , costanti le condizioni termodinamiche del fluido per tutta la condotta e quindi  $T = T_s$ ), a un diametro  $D_e < D^*$ ; pertanto le dissipazioni di tipo fluidodinamico risultano maggiori delle fughe di calore, e il fluido a monte della condotta deve risultare umido.

La relativa equazione di bilancio, risulta:

$$Gdh = \frac{8k_a(1 + f_c)G^3(1 + 2r_d)^5}{d_{sv}^2 \pi^2 D_e^5} dL - \frac{T_s - T_e}{R_t} dL,$$

da cui: 
$$\frac{dh}{dL} = \frac{8k_a(1 + f_c)G^2(1 + 2r_d)^5}{d_{sv}^2 \pi^2 D_e^5} - \frac{T_s - T_e}{GR_t},$$

e quindi: 
$$h(L) = h_o + \left[ \frac{8k_a(1 + f_c)G^2(1 + 2r_d)^5}{d_{sv}^2 \pi^2 D_e^5} - \frac{T_s - T_e}{GR_t} \right] L.$$

Imponendo che nella sezione finale della tubazione, ( $L = L_f$ ), il fluido sia in condizioni di saturazione, ( $h = h_s$ ), si ottiene l'entalpia, (ovvero il titolo del vapore), a monte della condotta:

$$h_o = h_s - \left[ \frac{8k_a(1+f_c)G^2(1+2r_d)^5}{d_{sv}^2\pi^2D_e^5} - \frac{T_s - T_e}{GR_t} \right] L_f.$$

### § I°.6.13 – CONDOTTE PERCORSE DA LIQUIDO SATURO.

In caso di fluido a temperatura inferiore a quella dell'ambiente circostante, i fenomeni di rientrate termiche e dissipazioni per attriti fluidodinamici non sono contrastanti, ma complementari. Pertanto, affinché l'azione combinata della trasmissione termica e delle perdite di carico porti il liquido in condizioni di saturazione all'utenza, è necessario prevedere un opportuno grado di sottoraffreddamento a monte della condotta di trasferimento.

Si ottiene:  $dQ = \frac{T_e - T}{R_t} dL$ ;  $dP = \frac{8k_a(1+f_c)G^3}{d_{sl}^2\pi^2D_i^5} dL$ , con  $d_{sl}$  densità del

fluido saturo.

L'equazione di bilancio risulta, quindi:

$$\frac{T_e - T}{R_t} dL + \frac{8k_a(1+f_c)G^3(1+2r_d)^5}{d_{sl}^2\pi^2D_e^5} dL = Gc_{pl}dT,$$

da cui:  $\frac{dT}{dL} + \frac{T}{Gc_{pl}R_t} = \frac{T_e}{Gc_{pl}R_t} + \frac{8k_a(1+f_c)G^2(1+2r_d)^5}{c_{pl}d_{sl}^2\pi^2D_e^5}$ ,

con  $c_{pl}$  calore specifico del liquido sottoraffreddato.

L'integrale generale dell'equazione è pari all'integrale dell'omogenea

associata:  $\frac{dT}{dL} + \frac{T}{Gc_{pl}R_t} = 0$ , che vale:  $T(L) = c_1 e^{-\frac{L}{Gc_{pl}R_t}}$ , più un

integrale particolare che può ottenersi ponendo:  $T = \text{costante}$ , da cui:

$$T = T_e + \frac{8k_a(1+f_c)G^3(1+2r_d)^5 R_t}{d_{sl}^2\pi^2D_e^5}.$$

Si ottiene, pertanto:

$$T(L) = c_1 e^{-\frac{L}{Gc_{pl}R_t}} + T_e + \frac{8k_a(1+f_c)G^3(1+2r_d)^5R_t}{d_{sl}^2\pi^2D_e^5}.$$

Imponendo le condizioni al contorno:  $T = T_o$ , per  $L = 0$ , si ricava:

$$c_1 = T_o - T_e - \frac{8k_a(1+f_c)G^3(1+2r_d)^5R_t}{d_{sl}^2\pi^2D_e^5}, \text{ e quindi:}$$

$$T(L) = \left[ T_o - T_e - \frac{8k_a(1+f_c)G^3(1+2r_d)^5R_t}{d_{sl}^2\pi^2D_e^5} \right] e^{-\frac{L}{Gc_{pl}R_t}} + T_e + \frac{8k_a(1+f_c)G^3(1+2r_d)^5R_t}{d_{sl}^2\pi^2D_e^5},$$

valida per:  $T(L) < T_v$ , con  $T_v$  temperatura di vaporizzazione del liquido, oltre la quale il fluido diviene bifase.

Il sistema pompa tubazione ammette ottimizzazione economica con definizione del diametro economico, ( $D_e = D_{ec}$ ), della tubazione stessa, mentre dall'ottimizzazione economica dell'isolamento termico, si ha:

$$D^2 \ln^2 \frac{D}{D_e} = \frac{4c_{ti}(T_e - T_v)uTck}{COPc_i k_s t_{ek}},$$

e quindi il diametro di isolamento economico, da cui:

$$R_t = k_s \frac{\ln \frac{D}{D_e}}{2\pi c_{ti}}.$$

Pertanto imponendo che nella sezione finale della tubazione, ( $L = L_f$ ), il fluido sia in condizioni di saturazione, ( $T = T_v$ ):

$$T_v = \left[ T_o - T_e - \frac{8k_a(1+f_c)G^3(1+2r_d)^5R_t}{d_{sl}^2\pi^2D_e^5} \right] e^{-\frac{L_f}{Gc_{pl}R_t}} + T_e + \frac{8k_a(1+f_c)G^3(1+2r_d)^5R_t}{d_{sl}^2\pi^2D_e^5},$$

si ottiene il grado di sottoraffreddamento, richiesto:

$$T_o = T_e + \frac{8k_a(1+f_c)G^3(1+2r_d)^5 R_t}{d_{sl}^2 \pi^2 D_e^5} - \left[ T_e - T_v - \frac{8k_a(1+f_c)G^3(1+2r_d)^5 R_t}{d_{sl}^2 \pi^2 D_e^5} \right] e^{\frac{L_f}{G_{cpl} R_t}}.$$

#### § I°.6.14 – LINEE DI TRASMISSIONE ENERGETICA.

Per una funzione:  $y = y(x)$ , monotona decrescente, supposto di riportare la grandezza  $y$  al valore iniziale, ( $y = y_o$ , per:  $x = 0$ ), a intervalli regolari con mezzi esterni, la pendenza, se gli intervalli di ripristino sono sufficientemente contenuti, può ritenersi, (a meno dei gradini di risalita), costante:  $dy(x)/dx = [dy(x)/dx]_o = -a$ .

Il "rendimento di trasmissione" della grandezza  $y$  lungo il tratto, ( $Dx$ ), di ripristino delle condizioni iniziali, vale quindi:  $h = (y_o - aDx)/y_o$  e il rendimento totale, indicando con  $Dx_t$  la variazione totale della variabile

$$x: \quad h_t = \left( \frac{y_o - aDx}{y_o} \right)^{\frac{Dx_t}{Dx}} = \left( 1 - a \frac{Dx}{y_o} \right)^{\frac{Dx_t}{Dx}}.$$

Supponendo un ripristino continuo, si ha:

$$\lim_{Dx \rightarrow 0} h_t = \lim_{Dx \rightarrow 0} \left( 1 - a \frac{Dx}{y_o} \right)^{\frac{Dx_t}{Dx}} = e^{-a \frac{Dx_t}{y_o}},$$

ovvero in funzione della variabile  $x$ :  $h(x) = e^{-ax/y_o}$ .

Per la trasmissione a distanza di potenza, la funzione risulta:  $P = P(L)$ , con  $L$  coordinata spaziale di trasferimento.

**Trasmissione di potenza meccanica in forma di pressione di un fluido.**

In tal caso si ha:  $P = GDp/d_s$ , con:  $a = \frac{dP}{dL} = \frac{8k_a(1+f_c)G^3}{d_s^2 \pi^2 D^5}$ ,

$$\frac{a}{P} = \frac{8k_a(1+f_c)G^2}{d_s \pi^2 D^5 Dp}, \text{ da cui: } h(L) = e^{-\frac{8k_a(1+f_c)G^2 L}{d_s \pi^2 D^5 Dp}}.$$

### Trasmissione di potenza termica.

In caso di fluidi monofase, si ha:  $\dot{Q} = Gc_p \Delta T$ ;  $a = \left( \frac{dQ}{dL} \right)_0 = \frac{\Delta T}{R_t}$ , (con  $R_t$  resistenza termica per unità di lunghezza della condotta di trasporto del fluido), da cui:  $\frac{a}{Q} = \frac{1}{Gc_p R_t}$ , e quindi:

$$h(L) = e^{-\frac{L}{Gc_p R_t}}, \text{ mentre in caso di fluidi saturi, risulta: } \dot{Q} = G \Delta h;$$
$$a = \frac{dQ}{dL} = \frac{\Delta T}{R_t}; \frac{a}{Q} = \frac{\Delta T}{G \Delta h R_t}, \text{ da cui: } h(L) = e^{-\frac{\Delta T}{G \Delta h R_t} L}.$$

### Trasmissione di potenza elettrica.

Le perdite elettriche sono imputabili all'effetto Joule, per cui in un tratto elementare di conduttore si ha:  $dP = -d(RI^2) = -I^2 dR$ , con  $R$  resistenza del conduttore e  $I$  corrente elettrica, supposta costante. Indicando con  $r_s$  la resistività per unità di lunghezza e di sezione, ( $S$ ), del conduttore e con  $J$ , la densità di corrente, si ottiene:

$$R = r_s L / S, \quad J = I / S, \text{ da cui: } dP = -r_s J^2 S dL,$$

e quindi:  $-a = dP/dL = -r_s J^2 S$ ;  $-a/P = -r_s J/V$ ,

essendo:  $P = VI = VJS$ , con  $V$  tensione applicata.

Si ottiene, quindi:  $h(L) = e^{-\frac{r_s J L}{V}}$ , da cui la convenienza a trasmettere la potenza elettrica alle massime tensioni tecnologicamente ed economicamente realizzabili.

I valori di rendimento di trasmissione relativi all'ipotesi di ripristino continuo delle condizioni iniziali, sono i massimi realizzabili.

Infatti per  $\Delta x$  finito il rendimento vale:

$$h_d = \frac{y_0 - \frac{Dy}{Dx} \Delta x}{y_0} = 1 - \frac{\frac{Dy}{Dx} \Delta x}{y_0}.$$

Per  $Dy/Dx = -a = \text{costante}$ , il rendimento risulta sempre minore di quello relativo al ripristino continuo della grandezza:



$$h_d = 1 - a \frac{Dx}{y_o} < e^{-a \frac{Dx}{y_o}} = h.$$

Si ha, infatti:  $h_d(0) = h(0) = 1$ , mentre la pendenza, (negativa) della curva  $h_d(x)$ , risulta in modulo maggiore di quella della curva  $h(x)$ :

$$\left| \frac{dh_d(x)}{dx} \right| = \frac{a}{y_o} > \left| \frac{dh(x)}{dx} \right| = \frac{a}{y_o} e^{-a \frac{x}{y_o}}.$$

I risultati vanno corretti per il caso reale, ovvero di stazioni di ripristino delle condizioni iniziali a intervalli finiti.

### Trasmissione di potenza meccanica in forma di pressione di un fluido.

In tal caso si ha:  $dP/dL = -a = \text{costante}$ , da cui:

$$h_d(L) = 1 - a \frac{L}{y_o} = 1 - \frac{8k_a(1+f_c)G^2L}{d_s\pi^2D^5D_p}.$$

La lunghezza massima percorribile, ( $L_{\max}$ ), trasmettendo potenza:

$$h_d(L_{\max}) = 0, \text{ risulta: } L_{\max} = \frac{d_s\pi^2D^5D_p}{8k_a(1+f_c)G^2}.$$

### Trasmissione di potenza termica.

In questo caso, non risulta:  $dQ(L)/dL = -a = \text{costante}$ , essendo:

$\frac{dQ}{dL} = -\frac{DT}{R_t} e^{-\frac{L}{Gc_pR_t}}$ , e per il calcolo del rendimento occorre valutare la potenza, (variabile), dispersa nel tratto  $L$ :

$$-\int_0^L \frac{dQ}{dL} dL = \int_0^L \frac{DT}{R_t} e^{-\frac{L}{Gc_pR_t}} dL = Gc_pDT \left( 1 - e^{-\frac{L}{Gc_pR_t}} \right),$$

e quindi:  $h_d(L) = \frac{Q + \int_0^L \frac{dQ}{dL} dL}{Q} = e^{-\frac{L}{Gc_pR_t}}$ , ovvero pari al massimo ottenibile.

In questo caso, tuttavia, le due forme di potenza, (quella trasmessa e quella dissipata), non hanno la stessa natura, in quanto il moto del fluido non è sorretto dalla dissipazione di parte dell'energia trasportata, (termica), ma dalla potenza meccanica richiesta per compensarne le perdite di carico, che degrada, infine, in potenza termica.

Nel bilancio occorre, quindi, considerare come potenza utile trasmessa anche quella dissipata per perdite di carico e come potenza spesa l'equivalente termico dell'energia meccanica impiegata.

L'andamento della temperatura del fluido lungo la condotta, risulta la soluzione della equazione di bilancio:

$$-\frac{T - T_o}{R_t} dL + \frac{8k_a(1 + f_c)G^3}{d_s^2 \pi^2 D^5} dL = Gc_p dT, \text{ da cui:}$$

$$T(L) = \left[ DT - \frac{8k_a(1 + f_c)G^3 R_t}{d_s^2 \pi^2 D^5} \right] e^{-\frac{L}{Gc_p R_t}} + T_o + \frac{8k_a(1 + f_c)G^3 R_t}{d_s^2 \pi^2 D^5};$$

Il rendimento di trasmissione risulta, dunque:

$$\begin{aligned} h_d(L) &= \frac{Q + \int_0^L \frac{dQ(L)}{dL} dL}{Q + \frac{8k_a(1 + f_c)G^3 L}{h_t d_s^2 \pi^2 D^5}} = \frac{Q + \int_0^L \frac{[T(L) - T_o]}{R_t} dL}{Q + \frac{8k_a(1 + f_c)G^3 L}{h_t d_s^2 \pi^2 D^5}} = \\ &= \frac{\left[ \frac{DT}{R_t} - \frac{8k_a(1 + f_c)G^3}{d_s^2 \pi^2 D^5} \right] \left( 1 - e^{-\frac{L}{Gc_p R_t}} \right) + \frac{8k_a(1 + f_c)G^2 L}{R_t c_p d_s^2 \pi^2 D^5}}{\frac{DT}{R_t} + \frac{8k_a(1 + f_c)G^2 L}{R_t c_p h_t d_s^2 \pi^2 D^5}}, \end{aligned}$$

con  $h_t$  rendimento di conversione all'utenza di energia termica in energia meccanica/elettrica.

In caso di fluidi bifase, si ha:  $Q = GDh$ ;  $dQ/dL = -DT/R_t = -a$ , e il

rendimento risulta:  $h_d(L) = 1 - a \frac{L}{y_o} = 1 - \frac{DTL}{GDhR_t}$ , ovvero:

$$h_d(L) = \frac{\left[ Q - \frac{DT}{R_t} L + \frac{8k_a(1+f_c)G^3L}{d_s^2\pi^2D^5} \right]}{Q + \frac{8k_a(1+f_c)G^3L}{h_t d_s^2\pi^2D^5}} = \frac{\left[ Dh - \frac{DT}{GR_t} L + \frac{8k_a(1+f_c)G^2L}{d_s^2\pi^2D^5} \right]}{Dh + \frac{8k_a(1+f_c)G^2L}{h_t d_s^2\pi^2D^5}}.$$

### Trasmissione di potenza elettrica.

In questo caso si ha:  $-a = dP/dL = -r_s J^2 S = \text{costante}$ , da cui:

$$h_d(L) = 1 - aL/y_0 = 1 - r_s J L/V,$$

da cui la convenienza alla trasmissione alle massime tensioni tecnologicamente ed economicamente realizzabili.

La lunghezza di linea massima percorribile, ( $L_{\max}$ ), trasmettendo potenza, [ $h_d(L_{\max}) = 0$ ], risulta:  $L_{\max} = V/(r_s J)$ .

Circa le dimensioni delle linee di trasmissione, si ha:

$P = (\pi D^2/4) d_s c Dp$ , per la trasmissione di potenza meccanica tramite un fluido in pressione, con  $c$  velocità del fluido nella condotta;

$Q = (\pi D^2/4) d_s c c_p DT$ , ovvero:  $Q = (\pi D^2/4) d_s c Dh$ , con diametro di

$$\frac{2\pi c t_i}{R_t}$$

isolamento pari a:  $D e^{R_t}$ , per la trasmissione di potenza termica;

$P = (\pi D_c^2/4) J V$ , con  $D_c$  diametro del conduttore, per la trasmissione di potenza elettrica.

Il peso delle linee per unità di lunghezza vale, quindi:

$\pi D^2 d_{st} r_d$ , con  $d_{st}$  densità del materiale costruttivo delle tubazioni, per la trasmissione di potenza meccanica e termica;

$(\pi D_c^2/4) d_{sr}$ , con  $d_{sr}$  densità del conduttore, per la trasmissione di potenza elettrica.

Rispetto alle linee elettriche, le linee fluidodinamiche di trasmissione di energia, presentano valori inferiori del rendimento e maggiori pesi, ingombri e quindi costi, mentre il rendimento delle macchine termiche e

fluidodinamiche risulta assai inferiore a quello relativo alle macchine elettriche.

Il sistema di trasmissione energetica più economico appare, quindi, la linea elettrica sia per le ridotte dimensioni, affidabilità, flessibilità, agevole regolazione e semplice frazionamento, sia per gli elevati rendimenti di trasmissione e di utilizzazione, al punto da permettere lo sviluppo industriale svincolando le centrali di produzione di potenza dalle esigenze di frammentazione alle utenze e di ubicazione geografica rispetto ai centri industriali e civili di utilizzo.

